逐次逼近法

潘林森　王飞　编译



四川科学技术出版社

逐次逼近法

潘林森　王飞　编译

四川科学技术出版社

1989年·成都

责任编辑：杨佛章
封面设计：文章
技术设计：穆易
责任校对：侯矾楠

逐次逼近法

潘林森　王飞编译

四川科学技术出版社出版发行
（成都盐道街三号）
新华书店重庆发行所经销
四川省安岳县印刷厂印刷
ISBN 7-5364-1350-5/O·36

1989年8月第一版　开本 787×1092 1/32
1989年8月第一次印刷　字数 93千
印数 1—5000册　印张 4.25
科目：198—305　定价：1.35元

编译者序

本书主要介绍电子计算机解各类方程的方法。全书以逐次逼近为中心，系统地论述了高次方程、无理方程、线性方程组、非线性方程组等应用问题的计算机解法，对每种方法都列出了具体求解公式，并作了直观的几何解释，最后还简单讨论了方法的收敛性。

本书的特点是主题突出、选材精当，与计算机解题联系紧密，着重方法的实用性，完全避开了用高等数学知识进行繁琐复杂的理论推导，而从初等数学出发，形象直观地对各种方法展开讨论。全书以通俗的文字，从生活中实际例子出发，由浅入深地逐步把用计算机解题的各种方法呈现给读者。因此，具有一般中学数学基础知识的人都能阅读这本书，并能掌握书中论述的方法。

本书系根据莫斯科罗蒙诺索夫国立大学的N·Ya·维伦金先生的同名著作编译而成。原著用俄文出版过两次，后被译成英文，是一本很有特色的计算机应用数学的普及性读物。可作为学习计算机解题方法的启蒙教材，也可供从事计算机工作的工程技术人员参考。还可作数学爱好者的参考读物。

在本书编译过程中，王仲文先生审校了全部稿件并对文章作了不少修改；张新副教授也审阅了全部文稿。对他们给予的极大的帮助和支持，作者谨在此致谢。由于作者水平有限，谬误之处难免，敬请读者指正。

潘林森　王　飞

目 录

1. 绪 言

在中学学习数学的时候，我们大量的时间是花在求解方程或方程组上，最初学习的是一次方程和一次方程组，后来，又学习了二次方程、双二次方程和无理方程，最后，还熟悉和掌握了指数方程、对数方程和三角方程。

我们如此重视方程决不是偶然的，因为方程在数学实际应用中是非常重要的。在你所选择的任何一个领域中应用数学，都要求解方程或方程组，才能得到最终的答案。

在中学，方程常常用于求解物理问题，例如，考虑下面的问题：

把一石头扔进井里，如果石头扔下T秒后便听到石头碰击水面的声音，求井水水面至井口的距离？

我们假设距离为x，为此得到一个关于x的方程

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=T$$

其中，V是声音在空中传播的速度（$\sqrt{2v/g}$ 是石头落到井水水面的时间，x/v是声音从井水水面传到地面的时间）。这是一个无理方程。令$\sqrt{x}=y$，原式化为一个二次方程

$$\frac{y^2}{v}+\sqrt{\frac{2}{g}}y-T=0$$

这个方程，用大家都知道的二次方程求解公式便可求解。

方程同样可用于解答几何问题，例如把一长度为l的线段AB划分成AC和CB，使得$AB:AC=AC:CB$，这个问题便导出一个二次方程

$$x^2+lx-l^2=0$$

其中，x表示AC的长度。

把一角度为α的角分为3等份的问题又导出一个比较复杂的方程：

$$4x^3-3x-\cos\alpha=0$$

其中，$x=\cos\frac{\alpha}{3}$。这样的方程叫三次方程。在中学是没有学习过的，但是在任何高等代数教科书里，都证明了关于三次方程有求解公式，见下面的公式（3）。

然而，在物理中，我们常常遇到的问题，导出的是更复杂的方程，这些方程，往往用我们过去在中学或大学所学的知识是难以求解的，例如，把一根铁条（工程师称它为桁条），铅直地固定紧它的一端，这时，如果我们敲击铁条一下，铁条就要产生横波振动，要求这种振动的频率，就要求解方程

$$e^x+e^{-x}=\frac{2}{\cos x} \qquad (1)$$

其中，$e=2.71828\cdots\cdots$

中学里，根本没有求解这种方程的法则，不要以为这是由于中学数学课程太简短，实际上，在中学通常所学的知识范围内，方程（1）是根本没有公式求解的。现在，让我们对这个问题作比较确切的陈述：

一个方程，如果它的根能够借助于算术运算、开方运算以及指数、对数、三角函数、反三角函数，用方程的各种参

数来表示，我们就说方程有求解公式。在这种意义上，二次方程$x^2+xP+q=0$有以下求解公式

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{p^2/4-q} \qquad (2)$$

同样，三次方程*

$$x^3+px+q=0$$

也有求解公式

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (3)$$

可是在实际使用公式（3）时，却包含了若干困难，同时还要求使用复数。

对于四次方程，也有求解公式，但非常复杂，因此，我们不在此讨论了。

五次或高于五次方程的情形就更糟了，挪威数学家阿贝尔早在1826年就证明了：n次代数方程：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

当$n\geqslant5$时，没有求解公式（它的根不能借助于算术运算和开方运算来表示），只是在特殊情况下，高于四次的代数方程才可能有求解公式**。

如果数学家们研究方程时仅仅限于考虑准确解，即只考

---

* 任何三次方程$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$都可借助于代换$x+A_1/3a_0=y$化成上面的形式。

** 关于代数方程可参见A.G. Kurosh, Algebraic Equations of arbitrary Degrees, MirPublishers, Moscow, 1977

虑能由求解公式表示的解，那么，工程师和数学家之间将会发生下面的谈话：

工程师：我设计一幢建筑时，遇到这个方程（拿出方程）需要尽快地知道它的解——因为一个月之内我必须完成任务。

数学家：我很高兴帮助你，不过，这种形式的方程没有求解方法。

工程师：你不能推导一个求解公式吗？

数学家：那可没有用处，很久以前就证明了这种方程没有求解公式。

听了这样的谈话，人们可以想像，工程师的数学见解将使方程求解的可能性变得更糟。幸运的是，不可能发生这样的谈话。实际上，工程师通常不需要这样那样方程的求解公式。他们所需要的是满足一定精度的正确答案——而这种答案或者用公式求得或者用别的方法求得对他们都不太感兴趣。

比如，我们设想由某个公式得出的答案是$x=3+\sqrt{13}$。很明显，这个答案不能直接用在实际中（人们不可能在机器上制造出精确长度为（$3+\sqrt{13}$）cm的零件），实际应用中，$\sqrt{13}$应该表示成十进制小数，小数的位数要由给出的实际问题的要求精度而决定。

因此，只要数学家告诉工程师怎样计算方程的根以及必需的精度，工程师就非常满意了。数学中已呈现出了大量的求方程近似解的方法，本书中将要叙述其中一些方法。

2. 逐次逼近

大多数求方程近似解的方法都是根据逐次逼近的概念，这种概念不仅可用于求解方程，而且也可以用来解决许多实际问题。

逐次逼近法或尝试法及误差法常常被炮手们采用。他们为了击中靶子，需要确定大炮射击的方位和目标，炮弹发出后，观察炮弹的爆炸点，如果没击中靶子，就适当修正大炮射击的方位和目标，然后再继续射击。经过几次这样调整逼近以后，他们就能确定出准确的方位和目标，以便击中靶子。

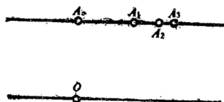


图 1

有时候，决定瞄准点也需要用逐次逼近法，比如，一架高射炮在O点射击一架飞机（图1）。假定某一时刻，飞机在A_0点，此时如果高射炮向A_0点瞄准射击，是击不中飞机的。因为炮弹射击的同时，飞机已飞到了A_1点。如果人们知道了飞机的速度和炮弹的速度，就可比较容易找到射击瞄准点A_1，可是，如果仍然瞄准A_1点射击，还是击不中飞机

的，因为炮筒的倾斜度改变了炮弹运行的轨道，因此，炮弹在OA_0距离间运行的时间与在OA_1距离间运行的时间不一样，结果，炮弹仍击不中飞机。但是，瞄准A_1点射击就比瞄准A_0点射击失误小。为了使失靶的可能性更小，炮手们还应该求得炮弹在OA_1距离间运行的时间以及在这个时间内飞机所到达的地点。A_2点将是跟踪目标点的再次逼近，之后再根据炮弹由O点到A_2点所需时间来计算A_3点，即是飞机在那个时间内要到达之处，经过若干次逼近以后，我们将找到具有一定准确度的瞄准点。

逐次逼近的方法还可用来解决许多其它问题。

假定，人们要从N个采沙场A_1、A_2……，A_n运沙到M个建筑工地B_1，B_2，……，B_m，假设第j个沙场A_j每天生产a_j吨沙，第K个工地B_k每天需要b_k吨沙，再假设从A_j沙场运输一吨沙到B_k工地需要的费用为C_{jk}（由A_j到B_k之间的距离和运输单价等决定）。

为了制定运输计划，我们作表1，在表1中，x_{jk}表示从A_j沙场运到B_k工地沙的总数。

表 1

	B_1	B_2	B_k	B_m
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{1k}	x_{1m}
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{2k}	x_{2m}
A_j	x_{j1}	x_{j2}	x_{jk}	x_{jm}
A_n	x_{n1}	x_{n2}	……	x_{nm}

其中，x_{jk}满足关系：

$$x_{j1}+x_{j2}+\cdots\cdots+x_{jm}\leqslant a_j$$

（每天从A_j沙场运出的沙石不能超过a_j吨），

$$x_{1k}+x_{2k}+\cdots\cdots+x_{nk}=b_k$$

（B_k工地每天要得到b_k吨沙）

如果按表1的运输计划，其运输费用为：

$$\begin{aligned}C=&C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\cdots\cdots+C_{1n}x_{1n}+\\&+C_{21}x_{21}+C_{22}x_{22}+\cdots\cdots+C_{2n}x_{2n}+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+C_{m1}x_{m1}+C_{m2}x_{m2}+\cdots\cdots+C_{mn}x_{mn}\qquad(4)\end{aligned}$$

任何运输计划都应该是使费用C尽可能最少，首先，我们试探性地拟定一种计划，比如，可采用下面的运输方案：

开始，把A_1沙场的沙运到离它最近的工地，如果这个沙场每天生产的沙除了供应那个工地外还有剩余，就把剩下的沙运到其它工地中离它最近的一个工地上，如还有剩，再把剩下的运到离它较近另一个工地。A_1沙场生产的沙运完以后，再同样安排运A_2沙场的沙，如此等等。直到最后，每个工地都有限定的沙场运沙。

可是，这种运输计划并不是最好的方法，因为这样安排运沙，可能剩下最后几个建筑工地要到很远的沙场去运沙。所以，这种运输计划必须加以改进。有些人采用的运输方案是：在沙场和工地之间，先考虑给需沙量大的工地运输，再考虑给需沙量小的工地运输。

改变计划使得费用减少，这种方法是数学的一个分支，叫线性规划*。

借助于这些方法，经过几次逼近后，我们就能找出一种

---

*关于线性规划可参见A·S·Solodovnikov Introductoni to linear algebra and linear programming", prosveshcheniye, Moscow, 1966

使和式（ 4 ）的值最小或者接近最小的计划。

通常，当我们制定一种计划、一张时间表等等的时候，最初总是用一些比较粗略的近似值，随后再逐次改进，直到得出最终的结果为止。

在工厂车间里，生产加工机器零件，也可以看成是一种逐次逼近的过程。开始是一种粗略的逼近——拿一块铸件或坯件，再把坯件拿到车床上先制成近似零件形状，然后在更精密的车床上经过几次加工，也就是几次逼近以后，便生产出我们需要的机器零件。

3．阿基里斯和乌龟

最先提到逐次逼近法的是公元500年前伊 利 亚的季诺。这位哲学家试图证明自然界没有运动，他用下面的论据证明不存在运动：即使让跑得最快的希腊神阿基里斯去追赶 1 只乌龟，他 也 追 不 上。先假设阿基里斯和乌龟之间相距1000步远距离，再假设阿基里斯 1 秒钟跑10步，乌龟 1 秒钟爬动 1 步，那么，在100秒钟时，阿基里斯跑完他与乌龟相 距 的1000步距离，但与此同时，乌龟也爬了100步 远。再 用10秒钟时间，阿基里斯又跑完这100步远的距离，但乌龟同时也又爬了10步远，等阿基里斯再跑完这10步时，乌龟又爬了 1 步。因此，乌龟永远在阿基里斯前面，阿基里斯永远不能赶上乌龟。所以，自然界没有运动。

当然，季诺的论证仅仅是一种措词巧妙的谬论，是没有理由的，运动本身是物体内在的性质。

要计算阿基里斯追赶上乌龟的时间，对任何小学生都不是困难的事，建立一个方程式就可计算：

$$10x - x = 1000 \qquad (5)$$

其中，x是所求时间，由方程我们得到

$$x = \frac{1000}{9} = 111\frac{1}{9}（秒）。$$

不过，季诺的论证可以看成是一种近似求解方程（5）的特殊方法。

实际上，把x项移到方程的右边，两边再除以10，我们将得到方程

$$x=100+\frac{x}{10} \qquad (6)$$

如果略去方程右边的$x/10$项（它相对于x是小量），我们得到x的近似解$x_1=100$。现在，把近似解$x_1=100$代入方程右边的x，我们将得到一个更精确的x值，即$x_2=100+10=110$，再把这个新值代入方程右边x，又得到下一个近似解$x_3=100+110/10=111$，按这种方法，我们得到一组近似解

$$x_1=100,\ x_2=110,\ x_3=111,\ x_4=111.1,\ \cdots\cdots$$

也就是说，季诺的论证得出了上述这组数。这组数能够通过关系式

$$x_{n+1}=100+x_n/10 \qquad (7)$$

对n逐次计算得出。当n增大时，这组数逼近方程（5）的准确解 $x=111\frac{1}{9}$。

因为$x/10$项较之x是小量，所以上面描述的求解方法是成功的。不然的话，我们将得到一组越来越离准确解远的数。例如，假设阿基里斯不是追赶一只爬得很慢的乌龟，而是追赶一只跑得很快的羚羊，我们假设羚羊每秒钟跑20步远，为求阿基里斯追上羚羊所需的时间，我们必须解方程

$$10x-20x=1000 \qquad (8)$$

这个方程的准确解是$x=-100$。这就是说，阿基里斯和羚羊并驾齐驱的时间是在100秒钟以前，现在羚羊已经跑在阿基里斯的前面了，它们相隔的距离随着时间增加在增大。

现在，我们试着把解方程（5）的方法用来解方程（8），

与解方程（5）一样，先把$20x$移到方程右边，然后，两边同除以10，我们得到方程

$$x=100+2x \qquad (9)$$

在方程右边令$x_0=0$，得到$x_1=100$，将这个值代入方程(9)右边得到第二个近似解$x_2=300$，继续这个过程，便得到了一组数

$$x_0=0,\ x_1=100,\ x_2=300,\ x_3=700,\ \cdots\cdots$$

我们看到，这组数是不逼近于方程（8）的准确解$x=-100$的。

4. 计算机做除法

读者可能感到迷惑的是：既然求解方程（5）的准确解是很简单的，为什么我们还要用逐次逼近法去求解呢？当然，方程（5）本身对我们自然没有多大兴趣。我们感兴趣的是这种逐次逼近方法，目的是要把这种方法应用到更复杂的方程上去。

值得指出的是：随着高速电子计算机的出现，用逐次逼近法求解与（5）相类似的方程，目前变得很必要了。有些计算机只能进行三种算术运算：即加法、减法和乘法运算，做除法只能被 2^n 形式的数除。那么，这样的计算机用什么方法做任意数的除法呢？

数 b 除以数 a 就相当于求解方程 $ax=b$。因为计算机能乘以或除以 2^n 形式的数，所以，我们假定 $1/2 \leqslant a < 1$（否则在方程 $ax=b$ 两边同乘以或同除以2的适当幂指数），把方程写成

$$x=(1-a)x+b \tag{10}$$

的形式。取 $x_1=b$ 作为方程的第一次近似解，解的误差用 α_1 表示，也就是说，假设 $x_1+\alpha_1=b/a$，则从方程（10）我们得到

$$x_1+\alpha_1=(1-a)(x_1+\alpha_1)+b=(1-a)x_1+b+(1-a)\alpha_1 \tag{11}$$

因为$1/2\leqslant a<1$，所以$0<1-a\leqslant\frac{1}{2}$。

由于因子$1-a$相当地小，因此，略掉方程（11）右边不超过$\frac{1}{2}\alpha_1$的$(1-a)\alpha_1$项，我们得到

$$x_1+\alpha_1\approx(1-a)x_1+b$$

数 $x_2=(1-a)x_1+b$将作为x的下一次近似值。

再假定x_2的误差用α_2表示，即是$x_2+\alpha_2=b/a$，则从方程（10）我们又得到

$$x_2+\alpha_2=(1-a)x_2+b+(1-a)\alpha_2$$

略去方程右边的$(1-a)\alpha_2$项，我们又得到一个近似等式

$$x_2+\alpha_2\approx(1-a)x_2+b$$

因此，我们可选取$x_3=(1-a)x_2+b$作为下一次近似值。用同样方法，我们可得到再下一次近似值

$x_4=(1-a)x_3+b$等等。一般地，从公式

$$x_{n+1}=(1-a)x_n+b \qquad (12)$$

中逐次计算x_1，x_2，……，x_n，最后就逼近b/a的准确值。然而，在这个公式里，仅仅用了加法、减法和乘法运算，这就是说，计算机可通过这个公式计算b/a的值。

上面描述的做除法的方法，实际上是根据无穷项递减等比级数求和公式。实际上，分数b/a可写成

$\frac{b}{a}=\frac{b}{1-(1-a)}$，结合前面的公式，我们得到

$$\frac{b}{1-(1-a)}=b+b(1-a)+b(1-a)^2+\cdots\cdots$$
$$+b(1-a)^{n-1}+\cdots\cdots \qquad (13)$$

假定级数的前n项和为x_n，即

$$x_n=b+b(1-a)+\cdots\cdots+b(1-a)^{n-1}$$

明显地

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=b+b(1-a)+\cdots+b(1-a)^{n-1}+b(1-a)^n\\&=b+(1-a)[b+b(1-a)+\cdots\\&\quad+b(1-a)^{n-1}]=b+(1-a)x_n\end{aligned}$$

这个公式与公式（12）恰好相同，因此，我们可用公式(13)中前n项和式的值作为分数b/a的近似值x_n．随着n增大，这个和式就逼近整个级数的和。因为$\frac{1}{2}\leqslant a<1$且$0<1-a\leqslant\frac{1}{2}$，故级数（13）是递减的。

5．逐次逼近法求平方根

现在，我们来讨论怎样应用逐次逼近法求平方根。在中学，我们学了由某个已知数的平方根求另外一些十进制数平方根的方法，实际上，这可看成是逐次逼近答案的方法。然而，这种方法相当复杂，学生们常常机械地使用了它，也还不完全了解它的计算原理。这里，我们要介绍另一种古代巴比伦使用的方法，这种方法，古希腊的几何学家希洛也曾用过，后来，它被人们渐渐忘记了。但是，现在在电子计算机上还时常用这种方法求平方根。

例如，假设我们要求28的平方根，首先选择平方根的某个近似值，比如取$x_1=5$，假定它的误差用α_1表示，即$\sqrt{28}=x_1+\alpha_1$，为求出α_1，对等式两边平方，得：

$$28=25+10\alpha_1+\alpha_1^2$$

即

$$\alpha_1^2+10\alpha_1-3=0 \qquad (14)$$

于是，我们得到一个关于α_1的二次方程，解此方程，得到$\alpha_1=-5\pm\sqrt{28}$，因此，要求α_1的精确解就必须计算$\sqrt{28}$。这似乎成了一种自身的恶性循环：要求$\sqrt{28}$就必须计算α_1，要计算α_1又必须考虑$\sqrt{28}$。

下面的论述给我们解决了这个问题。近似值$x_1=5$的误差α_1是小于1的，当然α_1^2更小，因此，在求α_1时，我们略

去方程（14）中的较小项α_1^2，则得到一个关于α_1的近似方程$10\alpha_1-3\approx0$，由此$\alpha_1\approx0.3$。

这样，我们就求出了误差项α_1的近似值，由于$\sqrt{28}=5+\alpha_1$，因此，$\sqrt{28}$的第二次近似值可取为：

$$x_2=5+0.3=5.3$$

为了求得$\sqrt{28}$更精确的近似值，可重复上面的步骤，也就是说，我们假定近似值$x_2=5.3$的误差为α_2，令$\sqrt{28}=x_2+\alpha_2$，等式两边平方并略去最小项α_2^2，我们得到$28\approx x_2^2+2x_2\alpha_2$。因此，

$$\alpha_2\approx\frac{28-x_2^2}{2x_2}$$

此式表明，$\sqrt{28}$的第三次近似值是

$$x_3=x_2+\frac{28-x_2^2}{2x_2}=\frac{28+x_2^2}{2x_2}$$

由$x_2=5.3$代入上式我们得到$x_3=5.2915\cdots\cdots$。同样，由近似值$x_3=5.2915$，又可得到下一次近似值

$$x_4=\frac{28+x_3^2}{2x_3}=5.2915\cdots\cdots$$

一般来说，如果我们已经求出了$\sqrt{28}$的近似值x_n，则下一次近似值是：

$$x_{n+1}=\frac{28+x^2_n}{2x_n}\qquad(15)$$

因此，我们每计算一次，都得出一个比前次更精确的$\sqrt{28}$的近似值。当x_{n+1}与x_n的差小于给定精度要求时，就停止计算。例如，我们计算$\sqrt{28}$的值，精确到0.0001，四次近似值就够了，即取$\sqrt{28}=5.2915$（实际上，$x_3=5.2915$，$x_4=5.2915$）。

上述方法，同样可用来求任何正数的平方根。因此，当

我们计算$\sqrt{a}$的值时，先选择某个初次近似值x_1，然后再借助于公式

$$x_{n+1}=\frac{a+x_n{}^2}{2x_n{}^2} \qquad (16)$$

逐次计算下一次近似值。

公式（16）还可以由与求$\sqrt{28}$不同的办法得到。假设我们已经求出了$\sqrt{a}$的第n次近似值x_n，因为$\sqrt{a}=\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}$，由此可见，$\sqrt{a}$是数$x_n$和$\frac{a}{x_n}$的几何平均值，所以，我们取这个几何平均值的近似值作为数x_n和$\frac{a}{x_n}$的算术平均值。即取

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{a+x_n{}^2}{2x_n}$$

这正好就是公式（16）。

因此，上述求平方根的逼近方法在于：每一步都以数x_n和$\frac{a}{x_n}$的算术平均值来代替它的几何平均值。

现在，我们讨论，逐次逼近方法用于求平方根是否一定能得到正确答案，也就是说，是出现阿基里斯和乌龟比赛的情形呢？还是出现阿基里斯跑在羚羊后面的情形（数学家们称第一种情形为收敛，第二种情形为发散）？我们将证明，求平方根的方法是一种收敛的方法，总是能得到所求的结果。

为此，我们来计算两次逐次逼近的误差$\alpha_n=\sqrt{a}-x_n$和$\alpha_{n+1}=\sqrt{a}-x_{n+1}$，根据公式（16），$\alpha_{n+1}$可写为：

$$\alpha_{n+1}=\sqrt{a}-x_{n+1}=\sqrt{a}-\frac{x_n{}^2+a}{2x_n}$$

$$= -\frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n}$$

但由于$x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a = (x_n - \sqrt{a})^2 = \alpha_n^2$

因此

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\alpha_n^2}{2x_n} \qquad (17)$$

我们只考虑$\sqrt{a}$的正近似值x_n的情况。因此，由公式（17）我们得出，所有的误差α_2，α_3，……，α_n……都是负数。换句话说，从第二次逼近以后的所有近似值都是过剩近似值*，而第一次近似值可以是过剩的或不足的。

由（17）式很容易证明，每计算一次近似值x_n，误差的绝对值至少减少为原来的1／2。实际上，等式（17）可以写为：

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\alpha_n}{2x_n}\alpha_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n}\alpha_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right)\alpha_n$$

所以

$$\left|\alpha_{n+1}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right| \cdot \left|\alpha_n\right| \qquad (18)$$

但是，因为$x_n > 0$，由此得出

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} < \frac{1}{2}$$

另一方面，如前所述，当$n \geqslant 2$时，有$x_n > \sqrt{a}$，所以

* 这说明，算术平均值总是大于几何平均值。

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a}}{2x_n}>0$$

这就导出不等式

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right|<\frac{1}{2} \qquad (19)$$

比较关系式（18）和（19）便知：$\left|\alpha_{n+1}\right|<\frac{1}{2}\left|\alpha_n\right|$

这样就证明了我们的论述：每一次逼近计算，误差的绝对值少于前次误差的绝对值的一半。也就是，第二次逼近以后，误差的绝对值就少于最初误差的1／4，第三次逼近以后，就少于1／8，如此等等。明显地，随着n的增大，误差的绝对值$\alpha_n=\sqrt{a}-x_n$将不断减少，直至趋于零。即是说，x_n趋向$\sqrt{a}$。

现在，我们来讨论，初始值x_1的选择对逼近过程有何影响？首先，要注意到前面已经证明了，无论选择怎样的初始值x_1，都不影响最终的结果，随着$n\to\infty$，误差序列，α_2，α_3，…α_n…趋向于零。因此，只要给定了所需的精度要求，对于任何初始近似值x_1，我们都会得到$\sqrt{a}$的满足精度要求的同一个值。即使选择一个差值很大的初始近似值，最后，我们还能得到正确的结果。实际上，经过10次逼近以后，误差的绝对值至少会减少至原来的1／1000（$2^{10}=1024\approx 1000$），经过40次逼近以后，误差的绝对值至少减少到10万亿分之一（10^{12}）。因此，当我们计算$\sqrt{2}$的值时，如果取初始值$x_1=10^6$，则误差$\alpha_1\approx 10^6$。而$|\alpha_{40}|<10^{-6}$，也就是说，开始计算的误差大约是1百万，40次逼近以后，误差绝对值将小于百万分之一。

然而，初始近似值的选择要影响逼近时间，如果初始近

似值选择得不恰当，一般需要很长时间，两次近似值x_{n+1}和x_n之差才能小于给定精度要求。选择一个恰当的初始近似值，可大大提高逼近速度。一般情况下，人们常常是从平方根表中取一个适当的值作为初始近似值，再用公式

$$x_2=\frac{a+x_1^2}{2x_1} \qquad (20)$$

求得一个比较精确的值。

这种求平方根的方法特别有效。因为，当x_n逼近$\sqrt{a}$时，误差减少的速度增加得相当快，这是因为在推导不等式

$$|\alpha_{n+1}|<\frac{1}{2}|\alpha_n|$$

时，我们用$\frac{1}{2}$代替了公式（18）中的$\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right|$。但是，$x_n$接近$\sqrt{a}$时，$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a}}{2x_n}$非常小，因此，$|\alpha_{n+1}|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right|\cdot|\alpha_n|$比$\frac{1}{2}|\alpha_n|$小得多。

我们还可以更准确地说明这一点，为此，将近似值x_n的绝对误差$|\alpha_n|=|\sqrt{a}-x_n|$和相对误差$\beta_n$一起讨论。相对误差就是绝对误差$|\alpha_n|$与$\sqrt{a}$的精确值之比值，用公式表示即是

$$\beta_n=\frac{|\alpha_n|}{\sqrt{a}}=\left|1-\frac{x_n}{\sqrt{a}}\right|$$

由公式（17）可得到

$$\beta_{n+1}=\frac{|\alpha_{n+1}|}{\sqrt{a}}=\frac{|\alpha_n|^2}{2x_n\sqrt{a}}$$

因为$x_n>\sqrt{a}$，所以

$$\beta_{n+1}<\frac{|\alpha_n|^2}{2(\sqrt{a})^2}=\frac{1}{2}\beta_n^2$$

于是，相对误差β_n满足不等式

$$\beta_{n+1} < \frac{1}{2}\beta_n^2 \qquad (21)$$

例如，如果近似值x_n的相对误差是0.01，则x_{n+1}的相对误差不超过0.00005，x_{n+2}则不超过0.0000000013。

我们看到，随着计算次数增加，近似值的精确度以极高的速率不断增进。还可证明当非常接近于$\sqrt{a}$的时候，每一次逼近，可以使精确的有效数字位数加倍。

例：计算$\sqrt{238}$，精度要求为0.00001

从平方根表中查得$\sqrt{238}=15.43$ 令$x_1=15.43$，再用公式求x_2

$$x_2=\frac{15.43^2+238}{30.86}=15.42725\cdots$$

现在估计答案的精确度。因为15.43的误差不超过0.01，即$\alpha_1=0.01$，所以$\beta_1\approx\frac{0.01}{15.43}<0.001$，因此

$\beta_2<\frac{0.001^2}{2}=0.0000005$。这就是说，近似值$x_2$的绝对误差$|\alpha_2|$不超过$15.43\times0.0000005<0.00001$，或者说，$\sqrt{238}=15.42725$的所有7位数字都是精确的。

如果我们想得到14位精确数字，就要由刚才得到的结果进行第三次逼近。然而，需要这样高的精度是非常罕见的。

最后，谈一下逐次逼近法的特性。采用通常的方法求平方根时，任何一步计算发生错误时，就会使后面的计算无效。但使用逐次逼近法就完全不同了。假如我们计算第n次逼近的近似值x_n时发生错误，而得到一个错误结果y_n，这时，所有后面的计算就相当于以y_n作为计算$\sqrt{a}$的初始近似值重新计算。但是，前面我们已经看到，无论选择怎样的初

始值，用逐次逼近法都能得到满足精度要求的结果。因此，即使发生错误，计算中的误差最后也将趋于零，它仅仅给我们额外增加了几次逼近过程。

由于逐次逼近法的这种特性，计算可从较低精度开始，对指定的精度只需最后几次逼近。这样就大大缩短了计算需要的时间。

6．逐次逼近法求正整数次方根

上面讨论的求平方根的方法，同样也可用于求任何正整数次方根。为此，我们需用公式*

$$(x+\alpha)^k = x^k + kx^{k-1}\alpha + \cdots\cdots \qquad (22)$$

其中，省略符号表示的项包含α^2，α^3等等。

现在，我们来证明这个公式。由中学数学课程知道：

$$(x+\alpha)^2 = x^2 + 2x\alpha + \alpha^2$$

$$(x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3$$

这些等式，我们可以重写为下面的形式

$$(x+\alpha)^2 = x^2 + 2x\alpha + \cdots\cdots \qquad (23)$$

$$(x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + \cdots\cdots \qquad (24)$$

于是，这就证明了公式（22）中$k=2$和$k=3$的情形。对公式（24）的两边同乘以（$x+\alpha$）得到

$$(x+\alpha)^4 = (x^3 + 3x^2\alpha + \cdots\cdots)(x+\alpha)$$

消去括号，我们将看到，其中有一项x^4不包含α，有两项包含α的一次幂为$3x^3\alpha$和$x^3\alpha$，其余项都含有α的二次和更高次的幂。所以，我们可以写为：

$$(x+\alpha)^4 = x^4 + 3x^3\alpha + x^3\alpha + \cdots = x^4 + 4x^3\alpha + \cdots\cdots \qquad (25)$$

（与前面一样，省略符号表示的项包含α^2、α^3等等）

* 这个公式根据二项式定理得出，但我们不要求读者也熟悉这个定理。

这样就证明了公式（22）中$k=4$的情形，对（25）式施行同样的方法又可得到

$$(x+\alpha)^5=x^5+5x^4\alpha+\cdots\cdots \qquad (26)$$

明显地，我们同样可以证明公式（22）对任何正整指数k都成立。

现在我们再回到求k次方根的问题上来，这里k是任意正整数。假设我们已求出了$\sqrt[k]{a}$的某一近似值x_1，x_1的误差用α_1表示，即是说，我们假设有$x_1+\alpha_1=\sqrt[k]{a}$，那么，$(x_1+\alpha_1)^k=a$由(22)式，我们可以把这个等式写为下面形式：

$$x_1^k+kx_1^{k-1}\alpha_1+\cdots\cdots=a$$

其中，省略符号表示的项包含有α_1^2，α_1^3等等。

如果选择的近似值x_1非常接近$\sqrt[k]{a}$，则这个近似值的误差α_1是非常小，因此，我们可忽略掉含有α_1高次幂的那些项，得到下面的近似等式

$$x_1^k+kx_1^{k-1}\alpha_1\approx a$$

由此得出$\alpha_1\approx\frac{a-x_1^k}{kx_1^{k-1}}$，利用这个结果，我们可取$\sqrt[k]{a}$的下次近似值为：

$$x_2=x_1+\frac{a-x_1^k}{kx_1^{k-1}}=\frac{a+(k-1)x_1^k}{kx_1^{k-1}}$$

同理，由近似值x_2，又可求出下一次近似值：

$$x_3=\frac{a+(k-1)x_2^k}{kx_2^{k-1}}$$

一般地，如果我们已经求出了$\sqrt[k]{a}$的近似值x_n，则下一次近似值可由公式

$$x_{n+1}=\frac{a+(k-1)x_n^k}{kx_n^{k-1}}$$

求得。

与求平方根的方法一样，对任何初始值x_1(要求为正数)，求解方法都是收敛的。换言之，选择任何x_1，数列 x_1，x_2，x_3，……x_n，……趋向于$\sqrt[k]{a}$。逼近过程要计算到x_n和x_{n+1}都满足精度要求时为止。

例　求$\sqrt[3]{970}$的值，精确度为0.001

在近似公式（27）中，假定$k=3$，即

$$x_{n+1}=\frac{a+2x_n^3}{3x_n^2} \qquad (28)$$

这里$a=970$，令$x_1=10$，由公式（28）：

$$x_2=\frac{970+2\times10^3}{3\times10^2}=\frac{2970}{300}=9.900$$

$$x_3=\frac{970+2\times9.9^3}{3\times9.9^2}=\frac{2910.60}{294.03}=9.899$$

我们可以看出，x_2和x_3都在精度要求以内。所以，$\sqrt[3]{970}$精度为0.001的值是$\sqrt[3]{970}=9.899$。

7．迭代法

前面讨论的所有例子，都是求解方程一般方法的具体实例，这种方法叫迭代法或逐次逼近法，其实质如下：

为求解方程$f(x)=0$，把它写为

$$x=\varphi(x) \qquad (29)$$

的形式，然后选择一个初始近似值x_1，代入（29）式右端计算，计算所得的结果$x_2=\varphi(x_1)$作为方程根的第二次近似值。一般地，如果已经求出了近似值x_n，则下一次近似值x_{n+1}可由公式$x_{n+1}=\varphi(x_n)$求得。

假如经过几次逼近以后，$x_n \approx x_{n+1}$已在精度要求之内，由于$x_{n+1}=\varphi(x_n)$，这就是说$x_n \approx \varphi(x_n)$也满足精度要求，即x_n是方程$x=\varphi(x)$根的近似值。

例如，求解阿基里斯和乌龟的问题，我们把方程$10x-x=1000$写为$x=100+\frac{x}{10}$并由公式$x_{n+1}=100+\frac{x_n}{10}$求方程根的近似值。在计算机做除法的问题中，我们把方程$ax=b$写为$x=(1-a)x+b$，并由公式$x_{n+1}=(1-a)x_n+b$求它的近似值。最后，当我们求k次方根时，把方程$x^k=a$化成

$$x=\frac{a+(k-1)x^k}{kx^{k-1}}$$

然后，再用公式

$$x_{n+1}=\frac{a+(k-1)x_n^k}{kx_n^{k-1}}$$

求它的近似值。这里再给出一个用迭代法解比较复杂的方程的例子。

例　解方程$10x-1-\cos x=0$　　　　(30)

将方程(30)写成

$$x=\frac{1+\cos x}{10} \tag{31}$$

的形式，选择一个初始近似值。比如取$x_1=0$，代入方程(31)右端得到

$$x_2=\frac{1+\cos 0}{10}=0.2$$

我们用它作为所求根的第二次近似值，并将x_2代入(31)式右端，我们又得到第三次近似值

$$x_3=\frac{1+\cos 0.2}{10}\approx\frac{1+0.98}{10}=0.198$$

然后，再求出

$$x_4=\frac{1+\cos 0.198}{10}\approx 0.198$$

我们看到等式$x_3=x_4$已满足精度0.001，因为$x_4=\frac{1+\cos x_3}{10}$，这就是说，取$x_3=0.198$是方程$x=\frac{1+\cos x}{10}$的根，具有0.001精度。

关于迭代法解方程，有以下几个问题：

①用迭代法得到的序列x_1，x_2，$\cdots x_n$，$\cdots$是否一定收敛于某一数ξ？

②如果极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$存在，$\xi$是否一定是方程$x=\varphi(x)$

的解？

③怎样才能使x_1，x_2，…，x_n…迅速地逼近方程$x=\varphi(x)$的根？

第二个问题很容易回答，假如x_1，x_2，…，x_n，…逼近于ξ，考虑等式$x_{n+1}=\varphi(x_n)$，随着n增大，等式左边逼近ξ，等式右边逼近于φ（ξ）*，因此，我们得到极限值$\xi=\varphi(\xi)$，即ξ是方程$x=\varphi(x)$的根。

对第一个问题，答案是否定的。例如：考虑方程$x=10^x-2$，如果取$x_1=1$，我们得到$x_2=8$，$x_3=10^8-2$，……随着n增大，x_n也增大，并不趋向于任何极限值。另一方面，如果我们把方程写为$x=\log(x+2)$的形式，逼近过程则是收敛的，并且经过三次逼近以后，我们就得到近似值$x=0.38$。

所以，我们应该把第一个问题换为如下问题：

什么形式的函数φ（x）才能保证数列x_1，x_2，…，x_n…收敛？

在讨论这个问题之前，我们先讨论迭代法的几何意义。

* 我们假定φ（x）是连续函数

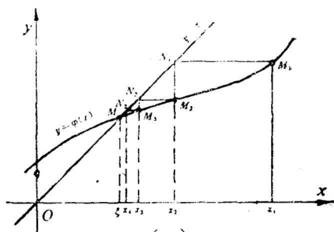
8. 迭代法的几何意义

显然，求方程$x=\varphi(x)$的根ξ，正好就是求曲线$y=\varphi(x)$与直线$y=x$的交点M在横坐标上的值。设有某一初始值x_1（图2），那么，点M_1的坐标$M_1(x_1, \varphi(x_1))$将依赖于曲线$y=\varphi(x)$。过这点作一水平线与直线$y=x$相交于点$N_1(\varphi(x_1)、\varphi(x_1))$，用$x_2$表示$\varphi(x_1)$，则点$N_1$的坐标为$N_1(x_2, x_2)$，然后再过点$N_1$作一垂线，与曲线$y=\varphi(x)$相交于点$M_2(x_2, \varphi(x_2))$，重复这种步骤，我们得到，与直线$y=x$的交点坐标$N_2(x_3, x_3)$（这里$x_3=\varphi(x_2)$），与曲线$y=\varphi(x)$的交点坐标$M_3(x_3、\varphi(x_3))$，如此等等。如果逼近过程是收敛的，则点列$M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots$将逼近我们所求的直线$y=x$与曲线$y=\varphi(x)$的交点。

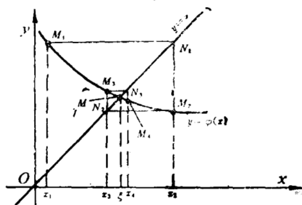
因此，逐次逼近法的几何意义就是，沿着一条折线，向着我们所希望的直线和曲线的交点逼近运动，而这条折线的顶点依次出现在直线和曲线上，且折线段是垂直和水平交替出现的（图2a）。

如果直线和曲线的位置像图2a那样，则这条折线看起来就像一架梯子。如果直线和曲线的位置像图2b那样，则这条折线看起来就像一条螺线。

有时候逼近过程也可能得不出正确结果（阿基里斯和羚羊的问题就是如此），这是因为点列$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$不是朝着$M$点而是背离$M$点运动（图3），用图表示就是



(a)

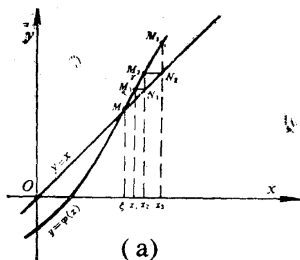


(b)

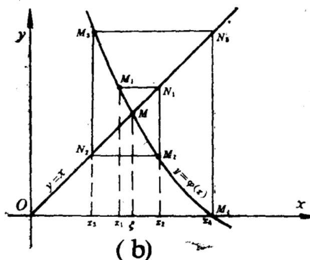
图 2

梯子（或螺线）的步幅变得越来越大。

图2和图3的不同点是：过直线$y=x$与曲线$y=\varphi(x)$的交点M作一条与x轴的夹角为135°的直线，这条直线连同直线$y=x$把空间分成四个象限。如果在点M邻近的曲线位于左象限和右象限，且选取初始近似值也在这个邻近区域内，则迭代过程收敛。反之，如果曲线位于上象限和下象限，则迭代过程发散。



(a)



(b)

图 3

然而，使用这条规则，首先要描绘出函数$y=\varphi(x)$的粗略图形，这总是不方便的，所以，还得考虑另外的收敛检验法，只用解析法而不需作任何几何图形就能确定迭代过程收敛或发散。这种检验法将在第10节中讨论。但是，我们先要熟悉压缩映射的概念。

9. 压缩映射

考虑区间〔a, b〕上的函数$y=\varphi(x)$。对区间上任何一点x_0，在y轴上都有一个对应点y_0，即$y_0=\varphi(x_0)$。为了作出这一点，我们可以过x轴上的点x_0作一垂线与函数$y=\varphi(x)$的图象相交，然后再过交点作水平线与y轴相交(图4)。

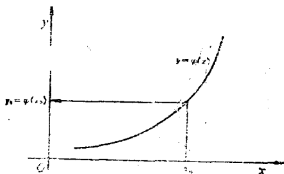


图 4

因此，函数$y=\varphi(x)$给出了区间〔a, b〕到y轴的一种映射。对应于区间〔a, b〕上的点，被映射到y轴上的所有点的集合称为区间〔a, b〕的象。例如，在映射$y=x^2$下区间〔2, 5〕的象是区间〔4, 25〕，在同一个映射下区间〔−1, 6〕的象是区间〔0, 36〕。可以证明，如果函数$y=\varphi(x)$在区间〔a, b〕上连续，则这个区间的象也是y轴上的区间，并且如果函数$y=\varphi(x)$是一个单调递增函数，则区间〔a, b〕的象是区间〔$\varphi(a)$, $\varphi(b)$〕，如果是一个单调递减函数，则象是区间〔$\varphi(b)$, $\varphi(a)$〕。(图5)

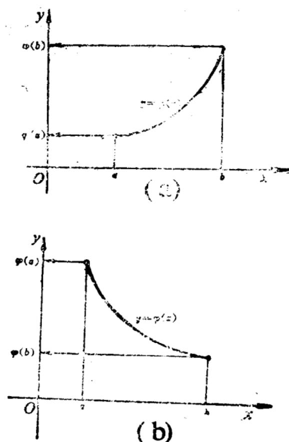


图 5

我们讨论了区间〔a，b〕到y轴的映射。进而还可讨论它到x轴的映射，为此，区间映射到y轴以后，将y轴按顺时针方向旋转90°，即是区间〔a,b〕上的点先映射到y轴上，然后，y轴上的点再映射到x轴上，用这种方法，函数$\varphi(x)$给出了一种区间〔a，b〕到x轴的映射，我们把这种映射表示为：$x \to \varphi(x)$。如果函数$\varphi(x)$连续，则我们可得到一个x轴上的区间。

也可能出现这样的情况，区间〔a、b〕的象〔a_1,b_1〕是区间〔a，b〕的一部分，例如：在映射$y=\sqrt{x}+1$下，

区间〔0，4〕映射到它的部分区间〔1，3〕，在这种情况下，我们就说，$\varphi(x)$把区间〔a，b〕映射到它的一个子区间。如果$\varphi(x)$把区间〔a,b〕映射到子区间〔c_1，b_1〕，则对于任何子区间〔a,b〕都将映射到子区间〔a_1，b_1〕，特别，子区间〔a_1，b_1〕通过$\varphi(x)$又映射到它的一个子区间〔a_2，b_2〕，在同样的映射下，子区间〔a_2，b_2〕又映射到它的子区间〔a_3，b_3〕，等等，结果我们得到一区间系：

$$[a,b],\ [a_1,b_1],\ \cdots,\ [a_n,b_n],\ \cdots$$

其中，每一个区间都是它前一个区间〔a_n，b_n〕的子区间，由此〔a_{n+1}，b_{n+1}〕是映射$\varphi(x)$下〔a_n，b_n〕的象。

例如：映射$x\to 1-\dfrac{\sqrt{1}}{x+2}$使区间〔0，4〕映射到它的子区间〔$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{5}{6}$〕，对区间〔$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{5}{6}$〕实施同样的映射，我们得到区间〔$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{11}{17}$〕等等。每一个区间都逐次包含在它前一区间里。

可能有两种情况：或者对所有区间〔a_n，b_n〕都有一个共同的区间〔c，d〕，或者这些区间只有一个公共点ξ，对于后者，就说区间系收缩到一点ξ。

下面，我们将用数学式子来描述区间系〔a，b〕，〔a_1，b_1〕，…〔a_n，b_n〕…收缩到一点的条件，为此，我们引进压缩这一重要概念。如果区间〔a，b〕上任意两点间的距离通过映射$\varphi(x)$至少减少到$\dfrac{1}{M}$（$M>1$），则$\varphi(x)$是把区间〔a，b〕映射到它子区间〔a_1，b_1〕的一个压缩映射。因为x_1和x_2两点间的距离为$|x_2-x_1|$，所以压缩映射条件可

由公式表示如下：

如果存在数q（$0<q<1$），使得对区间〔a，b〕中任意两点x_1，x_2，不等式

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|<q|x_2-x_1| \qquad (32)$$

成立（$q=\frac{1}{M}$），则称映射$\varphi(x)$是区间〔a，b〕上的一个压缩映射。

区间〔a，b〕的任意子区间〔c，d〕的长度通过压缩映射$\varphi(x)$至少减少到$M=\frac{1}{q}$。实际上，令〔c_1，d_1〕是区间〔c，d〕的象，则c_1和d_1是区间〔c，d〕上某些点x_1和x_2的象：

$$c_1=\varphi(x_1) \qquad d_1=\varphi(x_2)$$

然而

$$|d_1-c_1|=|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|\leqslant q|x_2-x_1|$$

因为点x_1和x_2在区间〔c，d〕上，则它们之间的距离$|x_2-x_1|$小于区间〔c，d〕的长度$|d-c|$，所以

$$|d_1-c_1|\leqslant q|d-c|$$

这就证明了我们的论述。

现在，我们可以用数学式子来描述对区间〔a，b〕逐次使用映射$\varphi(x)$得到的区间系〔a_1，b_1〕，〔a_2，b_2〕，…〔a_n，b_n〕…收缩到一点的条件，那就是：

如果〔a，b〕到它子区间〔a_1，b_1〕的映射$\varphi(x)$是一个压缩映射，则区间系〔a_1，b_1〕，〔a_2，b_2〕，…〔a_n，b_n〕，…将收缩到区间〔a，b〕上的一点ξ。

实际上，由于$\varphi(x)$是压缩映射，对任何n都有：

$$|b_n-a_n|\leqslant q|b_{n-1}-a_{n-1}|$$

同理：

$$|b_{n-1}-a_{n-1}|\leqslant q|b_{n-2}-a_{n-2}|$$

因此

$$|b_n-a_n|\leqslant q^2|b_{n-2}-a_{n-2}|$$

以此类推，我们得到

$$|b_n-a_n|\leqslant q^n|b-a|$$

因为$0<q<1$，所以，当n趋于无穷时，数列q，q^2，…q^n，…趋于零，并且区间〔a_n，b_n〕的长度$|b_n-a_n|$也趋于零。因此，不存在属于所有区间〔a_n，b_n〕的一个子区间。所以，区间系

$$[a, b], [a_1, b_1], \cdots [a_n, b_n]\cdots$$

收缩到一点。

最后，我们讨论映射$\varphi(x)$。不等式（32）：$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|<q|x_2-x_1|$对任意一对数$x_1$和$x_2$都是满足的，这样的映射是整个数轴上的一种压缩，在这样的映射$\varphi(x)$下，我们证明存在一个压缩区间。因为（32）式对任意两点x_1和x_2都满足，所以只要证明存在一个区间被$\varphi(x)$映射到它自己的区间里就行了。任取一数a，使$b=\varphi(a)$，再选取$q_1<1$，并使$q<q_1$，令

$$R=\frac{|b-a|}{1-q_1}$$

我们将证明，区间〔$a-R$，$a+R$〕被$\varphi(x)$映射到它的一个子区间里。实际上，令x是区间上任一点，则$|x-a|<R$，由于不等式（32）得：

$$|\varphi(x)-b|=|\varphi(x)-\varphi(a)|$$
$$<q|x-a|\leqslant qR$$

因而

$$|\varphi(x)-a| = |\varphi(x)-b+b-a| \leqslant$$
$$|\varphi(x)-b| + |b-a| \leqslant$$
$$|b-a| + qR = qR + (1-q_1)R$$
$$= (1+q-q_1)R < R$$

这就证明了区间〔$a-R$，$a+R$〕上的任意点就是被$\varphi(x)$映射成同一区间内的点。所以，映射$\varphi(x)$压缩了区间〔$a-R$，$a+R$〕。

10. 迭代法与压缩映射

现在，我们再回到迭代法上来，迭代法常常用于求解$x=\varphi(x)$类型的方程，如果ξ是方程的一个根，则$\xi=\varphi(\xi)$，且映射$x\to\varphi(x)$使ξ点固定在它所在的地方。因此，求解方程$x=\varphi(x)$的问题就相当于求映射$\varphi(x)$不动点的问题。

如果映射$\varphi(x)$在区间〔a，b〕上是一种压缩，则在此区间上总有一个不动点。为求出这一点，我们对区间〔a,b〕逐次使用映射$\varphi(x)$得到一组区间系

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$$

因为$\varphi(x)$是区间〔a，b〕上的压缩映射，故存在唯一点ξ属于所有区间〔a_n，b_n〕，这点就是$\varphi(x)$的一个不动点。

实际上，映射$\varphi(x)$把任意区间〔a_n，b_n〕映射到子区间〔a_{n+1}，b_{n+1}〕。所以，区间〔a_n，b_n〕上任意一点x的象$\varphi(x)$都在子区间〔a_{n+1}，b_{n+1}〕上，当然，也在区间〔a_n，b_n〕内。因为点ξ属于所有区间〔a_n，b_n〕，它的象$\varphi(\xi)$必然也属于所有这些区间。但属于所有区间的仅仅只有一点ξ，所以，$\varphi(\xi)=\xi$。即是说ξ是映射$\varphi(x)$的一个不动点。

这样，对于区间〔a，b〕上的压缩映射，在此区间上总有一个不动点，且这点是唯一的。实际上，若存在另外的不动点η，$\eta=\varphi(\eta)$，则有不等式

$$|\eta-\xi|=|\varphi(\eta)-\varphi(\xi)|<q|\eta-\xi|$$

因为$0<q<1$，所以，仅当$|\eta-\xi|=0$时，不等式满足，即$\eta=\xi$。

现在，我们系统地阐述迭代法收敛的必要条件。

假设函数$\varphi(x)$是区间〔a, b〕上的压缩映射。则对区间〔a, b〕上的任意点x_0，由$x_{n+1}=\varphi(x_n)$得到的数列x_0, x_1, x_2, …, x_n, …收敛于这个区间上方程$x=\varphi(x)$的根ξ。

实际上，令〔a_n, b_n〕($n=1$, 2, …)是在〔a, b〕上依次应用映射$\varphi(x)$得到的一系列区间。因为点x_0在区间〔a, b〕上，它的象$x_1=\varphi(x_0)$在区间〔a_1, b_1〕上，区间〔a_1, b_1〕上的点x_1的象$x_2=\varphi(x_1)$在区间〔a_2, b_2〕上，如此等等。于是，对任意的n，点x_n都在区间〔a_n, b_n〕上。由于区间〔a_n, b_m〕的长度随着n增大而趋于零。所以，点列x_1, x_2, …, x_n, …逼近于这个区间上的公共点ξ。

上面论述表明，区间〔a, b〕上的任意点x_0，都可作为初始点。

现在，我们再来求点列x_0, x_1, …, x_n, …逼近ξ的速度。因为$\xi=\varphi(\xi)$，所以对区间〔a, b〕上的任意点c，有

$$|\varphi(c)-\xi|=|\varphi(c)-\varphi(\xi)|<q|c-\xi| \qquad (33)$$

把不等式(33)应用于点列x_0, x_1, x_2, …, x_n, …，因为$x_n=\varphi(x_{n-1})$，由此得出

$$|x_n-\xi|=|\varphi(x_{n-1})-\xi|<q|x_{n-1}-\xi|$$

然而对任何n有

$$|x_n-\xi|<q|x_{n-1}-\xi|<q^2|x_{n-2}-\xi|<\cdots$$
$$<q^n|x_0-\xi|$$

因此，随着n增大，误差$|x_n-\xi|$减少的速度至少和公比为q的几何级数减少的速度一样快。

我们举一些例子说明怎样应用上面证明的条件。

例1 迭代法能用于求解方程$x=\frac{1}{4+x^2}$吗？ (34)

此例中，$\varphi(x)=\frac{1}{4+x^2}$，对任意$x_1$和$x_2$有

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|=\left|\frac{1}{4+x_2^2}-\frac{1}{4+x_1^2}\right|$$

$$=\frac{|x_1^2-x_2^2|}{(4+x_2^2)(4+x_1^2)}$$

$$=\frac{|x_1+x_2|}{|4+x_1^2|\cdot|4+x_2^2|}\cdot|x_2-x_1|$$

应用算术平均值和几何平均值的不等式，我们得到

$$|x|=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2}\leqslant\frac{4+x^2}{4}$$

所以

$$|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|\leqslant\frac{(4+x_1^2)+(4+x_2^2)}{4}$$

$$=2+\frac{x_1^2+x_2^2}{4}\leqslant 2+\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+\frac{x_1^2x_2^2}{8}$$

$$=\frac{1}{8}(4+x_1^2)(4+x_2^2)$$

于是我们证明了对任意的x_1和x_2，不等式

$$\frac{x_1+x_2}{(4+x_1^2)(4+x_2^2)}\leqslant\frac{1}{8}$$

成立。所以

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|\leqslant\frac{1}{8}|x_2-x_1|$$

这就是说，映射$\varphi(x)$是整个数轴上的一种压缩。

我们已经知道，在这种情况下，存在一个区间被压缩映射到它自己的区间里。为求出得数，我们取$a=0$，则映射

$\varphi(x)$把点$a=0$映射成点$b=\frac{1}{4}$。此外，在这里$q=\frac{1}{8}$，我们取$q_1=\frac{1}{4}$，并且R为$\frac{|b-a|}{1-q_1}=\frac{1}{3}$，则$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$是被$\varphi(x)$映射到它自己的区间。所以，在此区间里，存在一个不动点，即是方程(34)的根。为求出此根，任取区间$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$上一点$x_0=0$作为初始点，使用迭代法得到：

$$x_1=\frac{1}{4}=0.25$$

$$x_2=\frac{1}{4+0.25^2}=\frac{1}{4.0625}=0.2461$$

$$x_3=\frac{1}{4+0.2461^2}=\frac{1}{4.0605}=0.2463$$

$$x_4=\frac{1}{4+0.2463^2}=\frac{1}{4.0605}=0.2463$$

所以，在精度 0.0001 内，有$x_3=x_4$。由此可见，取精度为0.0001时，方程(34)在区间$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$上的根是0.2463.因为映射$\varphi(x)$是整个数轴上一种压缩，所以方程(34)没有另外的根。

例2　能用逐次逼近法求解区间$[-1, 8]$上的方程$x=1+\sqrt[3]{x}$吗？

这里，$\varphi(x)=1+\sqrt[3]{x}$。因为$\varphi(-1)=0$，$\varphi(8)=3$，所以，$\varphi(x)$把区间$[-1, 8]$映射到它自己的区间里。然而，在这个区间上，$\varphi(x)$不是一种压缩。例如，假使取$x_1=-0.008$，$x_2=0.008$，则有

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|=|\sqrt[3]{0.008}-\sqrt[3]{-0.008}|$$
$$=0.4>|x_2-x_1|$$

在例1中，我们证明映射$\varphi(x)$是一种压缩用了不等式$\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$。现在，我们再介绍几个不等式，这些不等式常常被用来证明某种映射是压缩。

证明对$x>0$，不等式

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x \qquad (35)$$

成立。为此，注意到扇形OAB的面积S_{OBA}（图6）介于圆心角为x的三角形OAC和OAT的面积之间，即

$$S_{\triangle OAB}<S_{sectOAB}<S_{\triangle OTA}$$

但由于

$$S_{\triangle OAB}=\frac{R^2\sin x}{2}, \qquad S_{\triangle OTB}=\frac{R^2\operatorname{tg}x}{2}$$

（R为圆的半径），且扇形OAB的面积是$\frac{R^2x}{2}$。

因此

$$\frac{R^2\sin x}{2}<\frac{R^2x}{2}<\frac{R^2\operatorname{tg}x}{2}$$

约去$\frac{R^2}{2}$，我们得到不等式（35）。

从不等式（35）还可得出：

对$0<x<1$有 $x<\arcsin x$

对$x>0$有 $x>\operatorname{arctg}x$

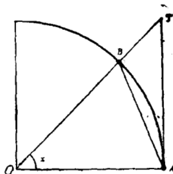


图6

另外还有不等式

$$e^x>1+x \qquad (x>0)$$

$$\ln(1+x)<x \qquad (0<x<1)$$

要证明它们稍微困难些。

例3 用迭代法求出方程

$$x=1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x \qquad (36)$$

的根。

因为对所有的x值，有$1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x>0$，所以方程只有正根。这里

$$\varphi(x)=1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x \qquad (37)$$

因此

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|=\left|\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x_2\right)\right.$$

$$\left.-\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x_1\right)\right|=\frac{1}{2}|\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1|$$

但对$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$有

$$\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1=\operatorname{arctg}\frac{x_2-x_1}{1+x_1x_2}$$

所以

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|=\frac{1}{2}\left|\operatorname{arctg}\frac{x_2-x_1}{1+x_1x_2}\right|$$

$$<\frac{1}{2}\left|\frac{x_2-x_1}{1+x_1x_2}\right|<\frac{1}{2}|x_2-x_1|$$

由此可见，映射$\varphi(x)$是半轴〔0，∞）上一种压缩，它把区间〔0，$\sqrt{3}$〕映射到它自己的子区间〔1，$1+\frac{\pi}{6}$〕上。所以，在区间〔1，$1+\frac{\pi}{6}$〕上有方程（36）唯一的根。为求此根，取$x_1=1$，则

$$x_2=1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1=1+\frac{\pi}{8}\approx 1.39$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2}\text{arctg}1.39 = 1.474$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2}\text{arctg}1.474 = 1.487$$

$$x_5 = 1 + \frac{1}{2}\text{arctg}1.487 = 1.489$$

$$x_6 = 1 + \frac{1}{2}\text{arctg}1.489 = 1.490$$

$$x_7 = 1 + \frac{1}{2}\text{arctg}1.490 = 1.490$$

可见，$x_6 = x_7 = 1.490$已满足0.001的精度。这就是说，方程具有这个精度的根是1.490。因为映射$\varphi(x)$是整个半轴$0 \leqslant x < \infty$上的压缩，所以方程（36）没有另外的根。

如果遇到一个方程$x = \varphi(x)$不能用迭代法求解，可以通过变换，化成可用迭代法求解的方程。例如，我们考察方程

$$x = x^3 - 2 \tag{38}$$

这里，因为$\varphi(1) = -1 < 1$，$\varphi(2) = 6 > 2$。所以在区间〔1，2〕上，这方程有一个根。但是，映射$x^3 - 2$在这个区间上却不是一种压缩，因为它不把区间〔1，2〕映射到它自己的子区间。我们把方程（38）重新写为

$$x = \sqrt[3]{x+2}$$

的形式，令$\psi(x) = \sqrt[3]{x+2}$，我们有

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| = |\sqrt[3]{x_2+2} - \sqrt[3]{x_1+2}|$$

$$= \left|\frac{x_2 - x_1}{\sqrt[3]{(x_2+2)^2} + \sqrt[3]{(x_1+2)(x_2+2)} + \sqrt[3]{(x_1+2)^2}}\right|$$

在区间〔1，2〕上，有$x_1 \geqslant 1$，$x_2 \geqslant 1$，所以

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{9}}|x_2 - x_1|$$

这就证明了映射$\psi(x)$是区间〔1，2〕上的一种压缩。取$x_1=1$，应用迭代法得：

$$x_2=\sqrt[3]{3}=1.442$$

$$x_3=\sqrt[3]{3.442}=1.510$$

$$x_4=\sqrt[3]{3.510}=1.520$$

$$x_5=\sqrt[3]{3.520}=1.521$$

$$x_6=\sqrt[3]{3.521}=1.521$$

因此，在精度0.001内，1.521是方程（38）在区间〔1，2〕上的根，方程没有其它的根。

我们看到，对原始方程作些适当变形，就可化成能够用迭代法求解的形式。

这里讨论的迭代法收敛性检验，使用不是很方便的，因为需要证明很复杂的不等式。下面（见第21节），我们将还要讨论一种收敛性检验定理，用它证明迭代法的收敛性就非常容易了。

11．弦截法

迭代法是求方程近似解最基本的方法之一，其它许多求方程近似解的方法都是迭代法的特殊情况。现在，我们讨论其中一种方法，叫弦截法（试位规则），或者叫弦位法（比例法）。

假设我们要解方程$f(x)=0$，这就相当于求函数$y=f(x)$的图像与x轴的交点。假定函数$f(x)$连续，且在a点和b点，$f(x)$的值有不同符号，则在区间〔a，b〕上，至少有一点使函数为零。换句话说，函数$y=f(x)$的图像在区间〔a，b〕上至少有一点ξ与x轴相交。一般情况下，可能有几个这样的点（图7）。因此，如果函数$y=f(x)$在区间〔a，b〕上是单调函数，且在区间的两个端点的值有相异符号，则函数图像与x轴仅有一个交点ξ。为求出这一点的近似值，用弦MN代替曲线$y=f(x)$在区间〔a，b〕上的一段弧，并求出弦与x轴的交点T（图8）。

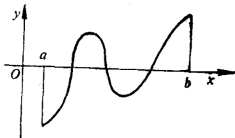


图 7

为此，考虑相似三角形MM_1T和NN_1T，由三角形相似得出

$$\frac{M_1T}{MM_1}=\frac{TN_1}{N_1N}$$

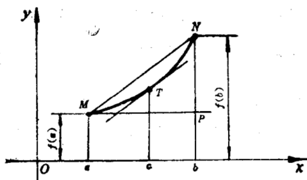


图 8

但从图 8 中可以看出：$M_1T=a_1-a$，$TN_1=b-a_1$，$MM_1=-f(a)$，$N_1N=f(b)$。其中，a_1表示弦MN与x轴交点的横坐标。所以

$$\frac{a_1-a}{-f(a)}=\frac{b-a_1}{f(b)}$$

解这个方程，我们得到

$$a_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

也可写成

$$a_1=b-f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \qquad (39)$$

或

$$a_1=a-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \qquad (40)$$

a_1就是方程$f(x)=0$在点a和点b之间根的近似值。

因为$f(a)$和$f(b)$的符号相异，所以有两种可能：或者$f(a)$与$f(a_1)$的符号相异，或者$f(b)$与$f(a_1)$的符号相异。如果函数$f(x)$在点a和a_1值的符号相异，则把公式（39）应用

于区间〔a，a_1〕上，从而得到所求根的近似值

$$a_2=a_1-f(a_1)\frac{a_1-a}{f(a_1)-f(a)} \qquad (41)$$

如果是另一种情况，即函数$f(x)$在点a_1和b的值有相异符号，则把公式（40）应用于区间〔a_1，b〕，得到所求根的近似值

$$a_2=a_1-f(a_1)\frac{b-a_1}{f(b)-f(a_1)} \qquad (42)$$

求出a_2的值以后，继续把公式（39）应用于区间〔a,a_2〕上（或者把公式(40)应用于区间〔a_2,b〕上），就能求出下一次近似值a_3。一般地，如果近似值x_n已经求得，下一次近似值可用公式

$$a_{n+1}=a_n-f(a_m)\frac{a_n-a}{f(a_n)-f(a)} \qquad (43)$$

或者

$$a_{n+1}=a_n-f(a_n)\frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} \qquad (44)$$

求得。

我们得出了（43）和（44）两个公式，使用时应该用哪个公式呢？假设曲线是向上凹的，在这种情况下，曲线上的各点应该与函数为正值的任一端连接，无论它是M端点或N端点。反之，如果曲线是向下凹的，则点应该与函数为负值的那一端连接。图9中说明了函数图像可能出现的不同位置。这些图像，给出了下面论述的直观意义。

假设函数$f(x)$在区间〔a，b〕上单调连续，函数的凹凸性在区间上不改变方向，且函数在区间两个端点的值有相异符号，则选定正确的逼近公式，由弦截法得出的点列收敛于

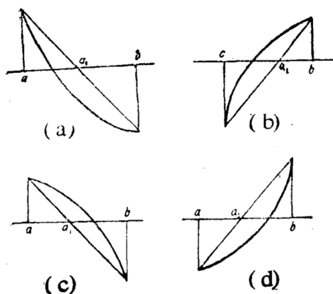


图9

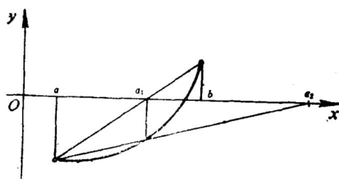


图10

方程$f(x)=0$的根。

反之，如果选择的公式不正确，由弦截法得到的点a_2，就可能超出区间〔a，b〕，图10就说明了这种情况。

上述的弦截法正好就是迭代法的一种特殊情况。假设函数$f(x)$在$x=a$点不为零，在这种情况下，方程$f(x)=0$就相当于方程

$$x=x-f(x)\frac{x-a}{f(x)-f(a)} \quad (45)$$

实际上，如果$f(\xi)=0$，则

$$\xi=\xi-f(\xi)\frac{\xi-a}{f(\xi)-f(a)} \quad (46)$$

相反地，如果$\xi\neq a$，且(46)式成立，则$f(\xi)=0$。

然而，方程(45)是$x=\varphi(x)$的形式。其中

$$\varphi(x)=x-f(x)\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=\frac{af(x)-xf(a)}{f(x)-f(a)}$$

取$x_0=b$，应用迭代法，我们将得出一组数列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

这组数列与用弦截法公式

$$a_{n+1}=a_n-f(a_m)\frac{a_n-a}{f(a_m)-f(a)}$$

得出的数列一样。

作为例子，我们用弦截法求解方程

$$x^3+3x-1=0 \quad (47)$$

这里，$f(x)=x^3+3x-1$。因为$f(0)=-1$，$f(1)=3$，所以方程在区间〔0，1〕上至少有一根。如果我们作出函数$y=x^3+3x-1$的图像，可以看出，它在区间〔0，1〕上的图像是向上凹的。所以，我们使用公式(39)。按照这个公式，方程第一次近似根是

$$x_1=b-f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}=1-3\times\frac{1-0}{3-(-1)}=0.25$$

为求出第二次近似值，我们用公式

$$x_2=b-f(b)\frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)}=1-3\times\frac{1-0.25}{3+0.23}=0.31$$

于是

$$x_3 = 1 - 3 \times \frac{1 - 0.31}{3 + 0.040} = 0.319$$

$$x_4 = 1 - 3 \times \frac{1 - 0.319}{3 + 0.010} = 0.322$$

$$x_5 = 1 - 3 \times \frac{1 - 0.322}{3 + 0.0006} = 0.322$$

所以，方程在区间〔0， 1〕上具有精度0.001的根是0.322。

12. 改进的弦截法

如果弦截法收敛，它收敛的速度与迭代法相同，即近似根的误差值按等比几何级数减少。有一种改进的弦截法，可使收敛速度大大提高。使用弦截法时，每一次计算近似值都用了区间〔a，b〕的两个端点值之一。我们可以用前两次计算得出的近似值来代替区间〔a，b〕的两个端点值，因为它们更接近方程的根。

使用前两次近似值计算的公式形式如下（图11a）：

$$a_{n+1}=a_n-f(a_n)\frac{a_n-a_{n-1}}{f(a_n)-f(a_{n-1})} \qquad (48)$$

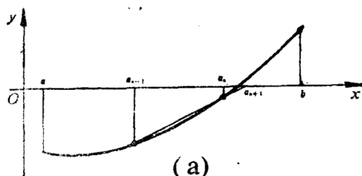
这里，a_1由公式（39）计算，a_2由公式（41）或（42）计算，取决于$f(a)$，$f(b)$和$f(a_1)$的符号而定：如果$f(a)<0$，$f(b)>0$，则$f(a_1)<0$时选择公式（42），$f(a_1)>0$时选择公式（41）。

如果由公式（48）计算出的a_3，结果是落在区间〔a,b〕之外，计算下一次近似值时，就把靠近a_3的那个区间端点值用来代替a_3（图11b）。

改进弦截法的收敛性比通常弦截法的收敛性，结果要好得多。即，如果ξ是方程$f(x)=0$的根，则有

$$|a_{n+1}-\xi|<c|a_n-\xi|^t \qquad (49)$$

其中，$t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.618$



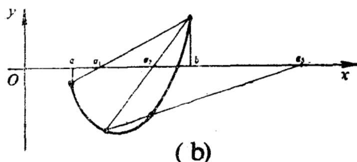


图11

作为例子，我们用改进的弦截法求解前面的方程

$$x^3+3x-1=0$$

与通常弦截法一样，第一次近似值$a_1=0.25$，且$a_2=0.31$。下一次近似值就由公式（48）计算：

$$a_3=a_2-f(a_2)\frac{a_2-a_1}{f(a_2)-f(a_1)}=0.31+0.040\times\frac{0.31-0.25}{-0.040+0.234}$$

$$=0.3223$$

我们有$f(0.3223)=0.0004$。显然，$x=0.3223$作为方程的根，精确到0.0001。

13. 多项式的微商

借助于迭代法求解方程$f(x)=0$，很大程度上取决于怎样把方程化成$x=\varphi(x)$的形式。许多情况下，最好采用牛顿根据微商（即导数）概念提出的方法。这一节里，我们要讨论多项式的微商并对微商作些解释，使我们能用牛顿方法去求解代数方程，即下面形式的方程

$$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k=0 \quad (50)$$

令

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$$

$f(x)$是一个多项式。考虑多项式$f(x+\alpha)$，即式子

$$a_0(x+\alpha)^k+a_1(x+\alpha)^{k-1}+\cdots+a_k \quad (51)$$

如果消去（51）式中的括号，我们发现，有些项完全不含有α，有些项含有α的一次幂，有些项含有α的二次幂，如此等等。我们把含α同次幂的项合并在一起，则多项式$f(x+\alpha)$可表示成下面的形式

$$f(x+\alpha)=f_0(x)+f_1(x)\alpha+f_2(x)\alpha^2+\cdots+f_k(x)\alpha^k \quad (52)$$

（因为多项式$f(x)$的最高次数是k次，所以展开式（52）中α的最高次数也为k）明显地，$f_0(x)$，$f_1(x)$，…，$f_k(x)$也是关于x的多项式

例 取$f(x)=2x^3-3x^2+6x-1$，则

$$f(x+\alpha)=2(x+\alpha)^3-3(x+\alpha)^2+6(x+\alpha)-1$$
$$=2(x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3)-3(x^2+2x\alpha+\alpha^2)$$

$$+6(x+\alpha)-1=(2x^3-3x^2+6x-1)$$
$$+(6x^2-6x+6)\alpha+(6x-3)\alpha^2+2\alpha^3$$

所以此例中

$$f_0(x)=2x^3-3x^2+6x-1$$
$$f_1(x)=6x^2-6x+6$$
$$f_2(x)=6x-3$$
$$f_3(x)=2$$

我们看到，$f_0(x)$与$f(x)$一致，这决不是偶然的巧合。如果我们在方程（52）中令$\alpha=0$，便得到$f(x)=f_0(x)$。

现在，我们再看下一项$f_1(x)\alpha$，α的系数即多项式$f_1(x)$就称为多项式$f(x)$的微商。例如多项式$2x^3-3x^2+6x-1$的微商是$6x^2-6x+6$。一个多项式的微商通常记作$f'(x)$。

因此，多项式$f(x)$的微商$f'(x)$就是多项式$f(x+\alpha)$展开式中关于α乘幂项的系数。

引用上面的记号，我们可以把（52）式重写为

$$f(x+\alpha)=f(x)+f'(x)\alpha+\cdots\cdots \qquad (53)$$

其中，省略符号表示的项包含α^2，α^3，……，α^k。例如

$$2(x+\alpha)^3-3(x+\alpha)^2+6(x+\alpha)-1$$
$$=2x^3-3x^2+6x-1+(6x^2-6x+6)\alpha+\cdots$$

我们介绍了多项式$f(x)$微商的概念，现在再讨论怎样计算微商。为此考虑多项式

$$f(x+\alpha)=a_0(x+\alpha)^k+a_1(x+\alpha)^{k-1}+\cdots+a_{k-1}(x+\alpha)$$
$$+a_k$$

对其中每一项都用展开式$(x+\alpha)^m=x^m+mx^{m-1}\alpha+\cdots$代换（见第6节），我们得到

$$f(x+\alpha)=a_0(x^k+kx^{k-1}\alpha+\cdots)+a_1(x^{k-1}$$
$$+(k-1)x^{k-2}\alpha+\cdots)+\cdots+a_{k-1}(x+\alpha)+a_k$$

$$=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a^k+\alpha(ka_0x^{k-1}$$
$$+(k-1)a_1x^{k-2}+\cdots+a^k{}_{-1})+\cdots$$

把这个等式与（53）式

$$f(x+\alpha)=f(x)+\alpha f'(x)+\cdots$$

比较，我们得出：

多项式

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k \quad (54)$$

的微商是

$$f'(x)=ka_0x^{k-1}+(k-1)a_1x^{k-2}+\cdots+a^k{}_{-1} \quad (55)$$

例如，多项式

$$f(x)=6x^7+8x^3-3x^2-1$$

的微商是

$$f'(x)=42x^6+24x^2-6x.$$

14. 牛顿法求代数方程近似解

现在，我们再回到用牛顿法（切线法）求代数方程近似解上来。假定有方程

$$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k=0 \qquad (56)$$

假设已经以某种方法求出了方程根的一个近似值x_1，我们将说明如何求得这个根更精确的值。设近似值x_1的误差是α_1，即$x_1+\alpha_1$是方程（56）的根，则必有

$$a_0(x_1+\alpha_1)^k+a_1(x_1+\alpha_1)^{k-1}+\cdots+a_k=0 \quad (57)$$

也就是说

$$f(x_1+\alpha_1)=0$$

这里$f(x)$表示多项式$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$

但是，按照公式（31）有

$$f(x_1+\alpha_1)=f(x_1)+\alpha_1f'(x_1)+\cdots$$

其中点表示的项包含α_1^2，α_1^3，……α_1^k。因此，为确定α_1，我们有方程

$$f(x_1+\alpha_1)=f(x_1)+\alpha_1f'(x_1)+\cdots=0 \qquad (58)$$

如果初始近似值x_1足够精确，则误差α_1很小，这样，方程（58）中省略的项相对于α_1是非常小量，略去这些项，我们得到一个决定α_1的近似方程

$$f(x_1)+\alpha_1f'(x_1)\approx 0 \qquad (59)$$

由此得出

$$\alpha_1 \approx -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{60}$$

所以方程根的改进值就是

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{61}$$

然后，我们再改进得到的近似值，求出第三次近似值

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

一般地，如果我们已经求出了方程根的第 n 次近似值，则下一次近似值计算公式是

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{62}$$

公式详细形式如下：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a_0 x_n{}^k + a_1 x_n{}^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x_n + a^k}{k a_0 x_n{}^{k-1} + (k-1) a_1 x^{k-2} + \cdots + a_{k-1}} \tag{63}$$

如果近似值x_n和x_{n+1}满足精度要求，（在精度要求范围内）也就求出了根的近似值。

上面讨论的求解方法应归于著名的英国数学家牛顿（NEWTON）。

牛顿方法与迭代法有着非常紧密的联系。尤其是，如果函数 $y=f(x)$和 $y=f'(x)$没有共同的根，则方程 $f(x)=0$就相当于方程

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{64}$$

对这个方程应用迭代法，我们得出一列数x_1，x_2，…，x_n，…。计算这列数的关系式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_m)}{f'(x_n)} \tag{65}$$

与牛顿法公式一样。也就是说，牛顿法在于把方程$f(x)=0$写成（64）的形式，然后再对它应用迭代法。

例　用牛顿法解方程$x^3-3x-5=0$要求精度为0.001，选初始近似值为$x_1=3$

因为多项式$f(x)=x^3-3x-5$的微商是$f'(x)=3x^2-3$应用公式（62）：

$$x_{m+1}=x_n-\frac{x_n{}^3-3x_n-5}{3x_n{}^2-3}$$

所以

$$x_2=3-\frac{27-9-5}{27-3}=3-\frac{13}{24}=2.46$$

$$x_3=2.46-\frac{14.89-7.38-5}{18.16-3}=2.46-0.165=2.295$$

$$x_4=2.295-\frac{12.088-6.885-5}{15.801-3}=2.295-0.016=2.279$$

$$x_5=2.279-\frac{11.837-6.837-5}{15.582-3}=2.279$$

我们看到，取$x_4=x_5$已精确到0.001。所以，方程$x^3-3x-5=0$精确到0.001的根等于2.279。

在第6节中介绍的近似计算整次方根的方法也是牛顿方法的一种特殊情况。实际上，求$\sqrt[k]{a}$的值就是解方程

$$x^k-a=0$$

因为多项式x^k-a的微商是kx^{k-1}，所以对于方程

$$x^k-a=0$$

公式（62）为：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}}=\frac{a+(k-1)x_n^k}{kx_n^{k-1}}$$

这正好就是我们过去用来计算 $\sqrt[k]{a}$值的公式。

值得注意的是解方程$x^k-a=0$和解一般代数方程

$$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k=0$$

二者有本质的区别，对于方程$x^k-a=0$来说，初始近似值x_1的选择是无关重要的，不管选择怎样的x_1，经过若干次逼近计算以后，我们总能得出满足精度要求的 $\sqrt[k]{a}$的值。而对于方程（56）来说，情况就不同了。这里一个初始值可能得出一个根，另一个初始值又可能得出另一个不同的根。而有些初始值根本不能得出任何确切的值，也就是由公式（62）计算出的数列x_1，x_2，…，x_m，…不趋向于任何确定的极限，即是发散的。

15. 微商的几何意义

到目前为止，我们只给出了解代数方程的牛顿方法。为了把这种方法推广应用到解任意的方程上，必须先推广微商的概念，并介绍各类函数的微商。为此，我们先解释微商的几何意义。

考虑多项式

$$y=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$$

的图像。任取两点M和N（图12），点M的横坐标是x，点N

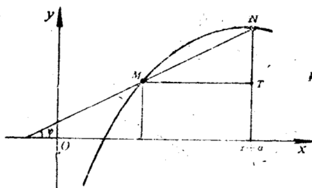


图12

的横坐标是$x+\alpha$。则点M和N的纵坐标可由表达式$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$和$f(x+\alpha)=a_0(x+\alpha)^k+a_1(x+\alpha)^{k-1}+\cdots+a_k$分别计算出。过$M$和$N$点画一割线并计算它的斜率$k$。从图上可以看出$\mathrm{tg}\psi=\frac{TN}{MT}$，但是线段$MT$

的长度等于点M和点N横坐标值之差，所以$MT=(x+\alpha)-x=\alpha$。

线段TN等于这两点纵坐标值之差，所以$TN=f(x+\alpha)-f(x)$

由此得出

$$\mathrm{tg}\psi=\frac{TN}{MT}=\frac{f(x+\alpha)-f(\alpha)}{\alpha}$$

而由公式（53）

$$f(x+\alpha)=f(x)+\alpha f'(x)+\cdots$$

其中，省略符号表示的项包含α^2，α^3，……。所以

$$\mathrm{tg}\psi=\frac{\alpha f(x)+\cdots}{\alpha}=f'(x)+\cdots$$

其中，省略符号表示的项包含α，α^2……。

因此，割线MN的斜率可由公式

$$k_{\text{割}}=\mathrm{tg}\psi=f'(x)+\cdots \tag{66}$$

表示。

现在，我们减小α值。这样一来，割线将绕点M转动。当$\alpha=0$时，就是极限情况。此时割线成为曲线$y=f(x)$在点

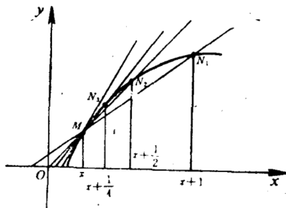


图13

* 线段的斜率是指线段与x轴正方向倾斜角的正切。例如，如果一条线段与x轴的倾斜度为60°，则它的斜率等于tg60°，即$\sqrt{3}$。

M的切线。图13中给出了$\alpha=1$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$时的情况。

然而当$\alpha=0$时，公式（66）中点省略的项都为零。所以，多项式$y=f(x)$图像在横坐标为x点的切线斜率用公式表示是

$$k_{切}=f'(x)$$

因此，多项式$f(x)$的微商等于多项式的图像在横坐标为x点的切线斜率。

例．求多项式$f(x)=x^3-4x^2+5x+1$图像在点$x=2$的切线与x轴的夹角。

因为$f'(x)=3x^2-8x+5$

$f'(2)=1$，所以$\text{tg}\psi=1$，即夹角$\psi=45°$。

16. 牛顿法的几何意义

现在，我们可以清楚地阐明牛顿法近似解代数方程的几何意义了。假定要解方程$f(x)=0$（$f(x)$为多项式），明显地，这个问题就是求函数$y=f(x)$图像与x轴的交点，即是求使$y=0$的点。

假设我们已经求出了方程根的近似值x_1，作曲线$y=f(x)$在横坐标为x_1的点N的切线，如果x_1选择恰当，则切线与x轴的交点T比点M更接近函数$y=f(x)$与x轴的交点（图14）。

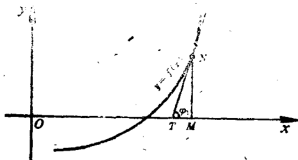


图14

为了求点T的横坐标x_2，考虑三角形TMN，三角形的直角边MN正好就是函数$y=f(x)$在点x_1的值，即$MN=f(x_1)$。另一直角边TM等于x_1-x_2，所以，切线与x轴夹角φ_1的正切用公式表示就是

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{f(x_1)}{x_1-x_2} \qquad (68)$$

由公式（68）得出

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{\operatorname{tg}\varphi_1} \tag{69}$$

但是，$\operatorname{tg}\varphi_1$是曲线$y=f(x)$的图像在横坐标为$x_1$的点的切线斜率，因此根据微商的几何意义：$\operatorname{tg}\varphi_1=f'(x_1)$

所以，公式（69）可写为

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

于是我们就求出了方程根的第二次近似值x_2。现在，我们再作曲线$y=f(x)$在横坐标为x_2的点的切线，则切线与x轴交点的横坐标由下列公式得出

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

一般地，如近似值x_n已经求出，为了求下一次近似值x_{n+1}，作曲线$y=f(x)$在横坐标为x_n的点的切线，切线与x轴交点的横坐标就是我们所求的x_{n+1}值。

计算x_{n+1}的公式是：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{70}$$

或

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{\operatorname{tg}\varphi_n} \tag{71}$$

其中φ_n是曲线在横坐标为x_n的点的切线与x轴的夹角。这个公式与牛顿法公式（62）完全一样。从而，我们已经知道了牛顿法的几何意义，它实质上就是以曲线$y=f(x)$的切线代替弧线。由于这种原因，牛顿法又叫切线法。

图15中说明了用牛顿法得出的点列x_1, x_2, …, x_n, …是怎样逼近曲线$y=f(x)$与x轴的交点ξ。

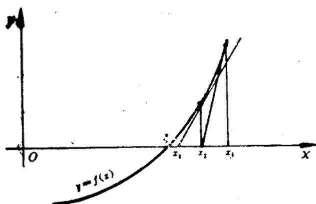


图15

17. 任意函数的微商

前面对牛顿法的几何解释，能够推广应用到任何具有 $f(x)=0$ 形式的方程，这里 $f(x)$ 可以是多项式以外的函数。为求这种方程的近似解，取方程的根的某个近似值 x_1，作曲线 $y=f(x)$ 在横坐标为 x_1 的点的切线，它与 x 轴的交点用 x_2 表示。然后再作曲线 $y=f(x)$ 在横坐标为 x_2 的点的切线，等等。与多项式情况一样，可以很容易地建立公式：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{\mathrm{tg}\varphi_n} \qquad (71)$$

其中 $\mathrm{tg}\varphi_n$ 是曲线 $y=f(x)$ 在横坐标为 x_n 的点的切线斜率。

公式（71）仍然不能用来进行计算，因为我们还不知道怎样求 $\mathrm{tg}\varphi_n$。所以我们必须先学会计算任意函数 $y=f(x)$ 图像（不仅仅是多项式的图像）的切线斜率。首先，我们先计算割线的斜率，过函数 $y=f(x)$ 上一点 M，作割线 MN，应用前面多项式的论证，我们同样得到计算割线斜率的公式

$$k_{sec}=\mathrm{tg}\psi=\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \qquad (72)$$

其中 x 是点 M 的横坐标值，$x+\alpha$ 是点 N 的横坐标值。如果减小 α 值，割线将绕 M 点转动，直到它处于曲线 $y=f(x)$ 在这点的切线位置（见图12）。所以我们可以把切线斜率写为

$$k_{tg}=\mathrm{tg}\varphi_n=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \qquad (73)$$

我们称上式右端的极限为函数 $f(x)$ 的微商，用 $f'(x)$ 表示，即

$$f'(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \qquad (74)$$

现在，我们可以把（73）式写为

$$k_{切}=\mathrm{tg}\varphi_n=f'(x) \qquad (75)$$

所以任意函数（不仅是多项式）在某点的微商 $f'(x)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在这一点的切线斜率*。

因为 $\mathrm{tg}\varphi_n=f'(x_n)$，所以公式（71）可写为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (76)$$

这个公式与公式（62）一致。于是牛顿法就推广应用到了所有具有 $f(x)=0$ 形式的方程。

* 如果不能作出函数 $y=f(x)$ 在横坐标为 x 的点的切线（比如函数图像在这一点有间断），则函数在这一点没有微商。

18. 微商的计算

前一节里，我们已经看到，为了求与曲线 $y=f(x)$ 相切的切线斜率，必须计算极限

$$f'(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$$

一般说来这种计算非常困难。但是，许多重要实例的极限已经计算出来了，换句话说，就是最常用函数的微商我们已经知道了。下面列出了一些常用微商的计算公式。

① $(a)'=0$

② $(x^k)'=kx^{k-1}$

③ $(a^x)'=a^x l_n a$

④ $(\sin ax)'=a\cos ax$

⑤ $(\cos ax)'=-a\sin ax$

⑥ $(\mathrm{tg}\,ax)'=\dfrac{a}{\cos^2 ax}$

⑦ $(\mathrm{ctg}\,ax)'=-\dfrac{a}{\sin^2 ax}$

⑧ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

⑨ $(\arcsin ax)'=\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$

⑪$(\mathrm{arctg}\,ax)'=\dfrac{a}{1+a^2x^2}$

（公式③和公式⑧中的$\ln a$表示以$e=2.71828\cdots$为底的对数，称为自然对数或者纳皮尔对数）。公式②中的k不仅仅是自然数，还可以是任何实数。例如：

$$(\sqrt{x})'=(x^{1/2})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

仅仅用公式①～⑩还不能够计算出所有函数的微商。但是，如果$f(x)$是由一些已经知道怎样求微商的函数经过算术运算组成，则我们还是可以很容易地求出$f(x)$的微商。为此，我们使用下面的法则，这些法则（和公式①～⑩）在高等数学课程里都有证明。

①函数和的微商等于它们微商的和。

$$[f_1(x)+f_2(x)]'=f_1'(x)+f_2'(x)$$

②常数可以提到微商符号外。

$$[af(x)]'=af'(x)$$

③两个函数乘积的微商计算公式是

$$[f_1(x)f_2(x)]'=f_1'(x)f_2(x)+f_1(x)f_2'(x)$$

④分数函数的微商计算公式是

$$\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]'=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{[f_2(x)]^2}$$

在第13节中给出的多项式微商计算公式就是法则①和法则②以及常用公式②的应用结果。

例1　求函数$f(x)=\dfrac{3x^2-x+1}{2x^3+5}$的微商。

应用法则④ 我们得到

$$f'(x)=\frac{(3x^2-x+1)'(2x^3+5)-(3x^2-x+1)(2x^3+5)'}{(2x^3+5)^2}$$

再应用多项式微商法则

$$(3x^2-x+1)'=6x-1$$

$$(2x^3+5)'=6x^2$$

所以

$$f'(x)=\frac{(2x^3+5)(6x-1)-(3x^2-x+1)6x^2}{(2x^3+5)^2}$$

$$=\frac{-6x^4+4x^3-6x^2+30x-5}{(2x^3+5)^2}$$

例2 求函数$f(x)=\frac{1}{10}\left(\arcsin 3x-\frac{1}{x^2}\right)$的微商。

应用公式②和公式⑨，以及法则①和②，我们得到

$$f'(x)=\frac{1}{10}\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}-\frac{1}{10}\left(\frac{-2}{x^3}\right)$$

$$=\frac{3}{10\sqrt{1-9x^2}}+\frac{1}{5x^3}$$

例3 求函数$f(x)=10^x\sin 2x$的微商。

应用法则③和公式③、④得

$$f'(x)=(10^x)'\sin 2x+10^x(\sin 2x)'$$

$$=10^x\sin 2x\cdot\ln 10+10^x 2\cos 2x$$

$$=10^x(\sin 2x\cdot\ln 10+2\cos 2x)$$

上面介绍的求微商的法则，已经能够计算出许多函数的微商。还有另外一种非常重要的法则——计算复合函数微商的法则，用公式描述如下：

如果函数$y=f(x)$可以写为$y=F(z)$，$z=\varphi(x)$的形式。则$f(x)$的微商计算公式是

$$f'(x)=F'(z)\cdot\varphi'(x) \qquad (77)$$

其中$z=\varphi(x)$。

例　求函数$y=\sin(x^3)$的微商。

这个函数可写为$y=\sin z$，$z=x^3$。函数$F(z)=\sin z$的微商是$F'(z)=\cos z$，函数$\varphi(x)=x^3$的微商是$\varphi'(x)=3x^2$。由公式（77）得：

$$[\sin(x^3)]'=F'(z)\cdot\varphi'(x)=\cos z\cdot 3x^2$$

将$z=x^3$代入，我们得到

$$[\sin(x^3)]'=3x^2\cos(x^3)$$

关于微商的概念，读者可在其它书中找到更详细的说明。例如在Ya.B.泽尔多维奇的《高等数学入门》一书里就有详细说明。

19. 求初始近似值

现在，我们讨论初始近似值的选择问题。求解方程$f(x)=0$时，第一次初始近似值可通过图示法得出，但对此要作函数$y=f(x)$的图像，并求出它与x轴的交点（在交点上$y=0$，所以$f(x)=0$）。

由于这样那样的原因，要作出函数图像是不方便的（例如在计算机上解方程）。因此，必须采用另外的求初始近似值的方法。下面的方法通过计算函数在某些点上的函数值（例如让自变量取定义范围内的整数值）来确定初始值的选择。如果函数$y=f(x)$连续（即函数图像没有间断点），则当函数在自变量分别取a和b值有相异的符号时（图16a），在a和b之间有方程$f(x)=0$的根。此时，a和b都可作为方程$f(x)=0$根的初始近似值。如果函数图像有间断点，也可能出现函数从负值不经过零一下跳到正值的情况（图16$б$）。

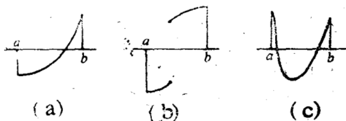


图16

要注意的是这种方法可能遗漏掉方程的某些根。例如图

16c中出现的情况，函数$y=f(x)$在a和b两点有相同的符号，但是在a和b之间却有使方程为零的点。

于是，我们已经求得两点：a和b。应该选哪一点作为牛顿法的初始近似值x_1呢？考虑图17，图17a和图17b表明，如果函数曲线是向上凹的，就选择使函数为正值的点，a点或b点作为初始近似值。初始值选择不当就可能导致计算出的x_n值超出区间〔a，b〕之外。同样地，如果函数曲线是向下凹的(图17c,17d)，就选择使函数为负值的点作为初始近似值。

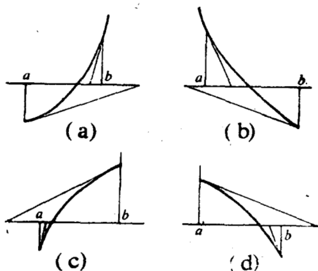


图17

如果知道函数$y=f(x)$的图像，使用这条规则是很方便的。但如果没有作出函数的图像，则需要计算函数$f(x)$的二阶微商来判断函数的凹凸性。函数$f(x)$的二阶微商就是它一阶微商的微商。

例如，给定函数$f(x)=x^3-4x^2+3x-1$，它的一阶微商是$f'(x)=3x^2-8x+3$，而二阶微商是$f''(x)=6x-8$。

在区间〔a，b〕上，如果函数的二阶微商是正的，则函数在此区间上是向上凹的。反之，如果二阶微商是负的，则函数在此区间上是向下凹的。这些在高等数学课程中都是有证明的。运用这些知识，我们得出下面使用牛顿法的规则：

设函数$f(x)$在区间端点a和b有相异的符号，如果$f(x)$在区间〔a，b〕上的二阶微商是正的，则应选取使函数$f(x)$为正值的点，a点或b点作为初始近似值x_1。反之，如果$f(x)$在区间〔a，b〕上的二阶微商是负的，则应选取使函数$f(x)$为负值的点作为初始近似值x_1。

20. 求解方程的组合法

在求解方程中，牛顿法常结合着弦截法一起使用。如函数$y=f(x)$的图像是向上凹的，则求a_1和x_1分别用公式

$$a_1=a-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \qquad (78)$$

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)} \qquad (79)$$

反之，如果函数$y=f(x)$的图像是向下凹的，则求a_1用公式（78），求x_1用公式

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)} \qquad (80)$$

如图18a和18b中所见到的那样，方程$f(x)=0$的根ξ通常位于点a_1和x_1之间。然后再应用牛顿法和弦截法，我们又得出一组新的点a_2和x_2，如此等等。

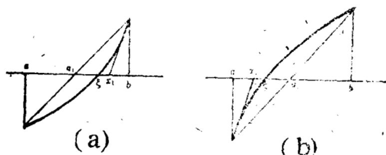


图18

用这种方法得到两组点列：a_1，a_2，…，a_n，…和x_1，x_2，…，x_n，…。这两组点列从不同的方向逼近方程的根ξ。这种方法的好处就是在于它分别从根的两边一起逼近。

例　用组合法解方程$x-\sin x-0.5=0$，要求精度为0.001。

作连续函数$f(x)=x-\sin x-0.5$的函数值表：

x	−1	0	1	2
f(x)	−0.659	−0.5	−0.341	0.591

由表可知，方程的根在1和2之间。应用第18节中的公式2和公式4得$f'(x)=1-\cos x$，所以在这里牛顿公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\sin x_n-0.5}{1-\cos x_n} \tag{81}$$

为了确定应选取1或者2作为初始近似值x_0，我们求函数$f(x)$的二阶微商。应用第18节中公式⑤，它的二阶微商是$f''(x)=\sin x$，且在区间〔1，2〕上，$\sin x$是正的*。明显地，应用前面叙述的规则，应该选取2作为初始近似值x_0，因为$f(x)$在点2的值是正的。

应用公式（81）有

$$x_1=2-\frac{2-\sin 2-0.5}{1-\cos 2}=2-\frac{2-0.909-0.5}{1+0.416}$$

$$=1.583$$

另一方面，应用公式（78），我们又得到

$$a_1=1-(-0.341)\frac{2-1}{0.591-(-0.341)}=1.366$$

＊因为$\sin x$在区间〔0，π〕＝〔0，3.141…〕上是正的，所以$\sin x$在它的子区间〔1，2〕上也是正的。

然后对区间〔a_1，x_1〕再应用公式（81）和公式(78)，我们得到

$$x_2 = 1.583 - \frac{1.583 - 1.000 - 0.5}{1 + 0.012} = 1.501$$

$$a_2 = 1.366 + 0.113 \frac{1.583 - 1.366}{0.083 + 0.113} = 1.491$$

继续下去，我们得出

$$x_3 = 1.498$$

$$a_3 = 1.498$$

因此，方程精确到0.001的根是1.498。

21. 迭代法的收敛检验

现在我们应用微商的概念，引出一种新的迭代法收敛检验。为此，需要拉格朗日（Lagrange）公式（Lagrange是18世纪法国数学家）。

考虑区间 $[a, b]$ 上曲线 $y=f(x)$，设 M 和 N 分别表示曲线在此区间上的起点和终点，作弦 MN（图19），则弦的斜率是

$$k_{弦}=\mathrm{tg}\psi=\frac{PN}{MP}$$

但是，$MP=b-a$，$PN=f(b)-f(a)$。所以

$$k_{弦}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

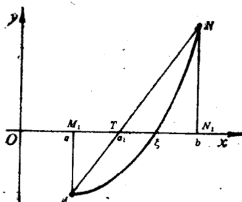


图19

用T表示从弦MN到弧MN上距离最远的点，过这一点作弦MN的平行线，它必将与曲线相切。因为如果它与曲线相交的话，就说明在曲线上还有另外的点到弦MN的距离比点T到弦WN的距离远。换句话说，就是曲线在T点的切线平行于弦MN，因此它与弦有相同的斜率。然而，切线的斜率等于$f'(c)$。这里c是点T的横坐标，所以，我们得出公式

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{82}$$

这个公式就叫拉格朗日公式。要注意的是拉格朗日公式中，点c总是介于点a和b之间的。拉格朗日公式也可写成下面的形式

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{83}$$

现在，我们再回到用迭代法解方程$x=\varphi(x)$上来。假定映射$y=\varphi(x)$把区间〔a，b〕映射到它自己的子区间，则在这区间上有不等式$|\varphi'(x)|<q$，其中$q<1$。因而在区间〔a，b〕上任取两点x_1和x_2，点$\varphi(x_1)$和$\varphi(x_2)$也属于区间〔a，b〕，应用拉格朗日公式我们得到

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(c)(x_2-x_1)$$

其中c介于x_1和x_2之间也属于区间〔a，b〕，且$|\varphi'(c)|<q<1$成立。所以

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|\leqslant q\cdot|x_2-x_1| \tag{84}$$

不等式（84）说明，$\varphi(x)$是一种压缩映射。但我们知道，如果$x\longrightarrow\varphi(x)$是把区间〔$a$，$b$〕映射到它自己子区间的压缩映射，则对区间上任意点$x_0$，点列$x_0$，$x_1$，$x_2$，…，$x_n$…（其中$x_{n+1}=\varphi(x_n)$）收敛于方程$x=\varphi(x)$的根。于是我们就证明了下面的定理。

定理　设函数$y=\varphi(x)$把区间〔a，b〕映射到它自己的

子区间，且在区间上有不等式 $|\varphi'(x)|<q$（$q<1$）成立。则对区间上任意点 x_0，由 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 得出的点列 x_0，x_1，…，x_n，…收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根。

粗略地讲，刚才证明的定理说明，逐次逼近法使我们能够求出方程 $x=\varphi(x)$ 的那些满足不等式 $|\varphi'(\xi)|<1$ 的根 ξ。迭代法的几何描述（见第8节）就是这些点连成一条折线，当 $|\varphi'(\xi)|>1$ 时，就破坏了这条折线。

如果在整个数轴上满足不等式 $|\varphi'(x)|<q<1$，则迭代法的收敛不依赖初始近似值 x_0 的选择（见第10节）。

例1 迭代法能否用于解下方程？

$$x=\frac{\cos x+\sin x}{4}$$

这里 $\varphi(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{4}$，所以

$$\varphi'(x)=\frac{-\sin x+\cos x}{4}$$

但 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，因此

$$|\varphi'(x)|=\left|\frac{-\sin x+\cos x}{4}\right|\leqslant\frac{|\sin x|+|\cos x|}{4}<\frac{1}{2}$$

所以能用迭代法解方程 $x=\dfrac{\cos x+\sin x}{4}$。

例2 能否用迭代法解方程（85）

$$x=4-2^x \tag{85}$$

所求根在区间〔1，2〕上，因为连续函数 $y=x-4+2^x$ 在这个区间上改变符号，即 $1-4+2^1<0$，$2-4+2^2>0$，

这里$\varphi'(x)=-2^x\ln 2$。我们再计算表达式$-2^x\ln 2$在区间〔1，2〕上的值。如果$1\leqslant x\leqslant 2$，则$2\leqslant 2^x\leqslant 4$。所以$2\ln 2\leqslant 2^x\ln 2\leqslant 4\ln 2$。

从自然对数表（底数是$e=2.78\cdots$）中查出$\ln 2=0.69\cdots$，显然在区间〔a，b〕上，不等式$1.38\leqslant 2^x\ln 2\leqslant 2.76$成立。所以不能使用迭代法。

为了能够使用迭代法，我们把方程（85）写为

$$2^x=4-x$$

的形式，然后两边取以2为底的对数，则我们得到

$$x=\log_2(4-x)$$

这里

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{(4-x)\ln 2}$$

且在区间〔1，2〕上，不等式

$$|\varphi'(x)|<\frac{1}{2\ln 2}=\frac{1}{1.38}<1$$

成立（读者可很容易地导出这个不等式）。

所以，方程写成这种形式时，使用迭代法收敛。

22. 迭代法的收敛速度*

现在，我们利用函数 $\varphi(x)$ 的微商求迭代法解方程 $x=\varphi(x)$ 的收敛速度。即我们要求方程根 ξ 的近似值 x_1，x_2，…，x_n，与 ξ 的误差 $\alpha_n=\xi-x_n$ 减少的速度。

必须注意到方程 $\xi=\varphi(\xi)$ 和 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 都是准确的。由此有下面的等式

$$\alpha_{n+1}=\xi-x_{n+1}=\varphi(\xi)-\varphi(x_n)$$

但由拉格朗日公式有

$$\varphi(\xi)-\varphi(x_n)=\varphi'(c_n)(\xi-x_n)=\varphi'(c_n)\alpha_n$$

其中 c_n 介于 x_n 和 ξ 之间。所以

$$\alpha_{n+1}=\varphi'(c_n)\alpha_n \qquad (86)$$

从等式（86）可引出下面的结论：

设 ξ 是方程 $x=\varphi(x)$ 在区间〔a，b〕上的根，如果在这个区间上，不等式 $|\varphi'(x)|<q<1$ 成立，且初始近似值 x_1 也属于区间〔a，b〕，则对任何 n 有关系式

$$|\alpha_{n+1}|<q^n|\alpha_1| \qquad (87)$$

成立。

实际上，由等式（86）知

$$|\alpha_2|=|\varphi'(c_1)|\cdot|\alpha_1|$$

但 c_1 属于区间〔a，b〕（图20），所以

---

* 这一节对初学者可以省略。

$$|\varphi'(c_1)|<q$$

由此得出

$$|\alpha_2|<q\cdot|\alpha_1|$$

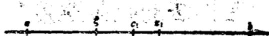


图20

用同样的方法，我们可得到

$$|\alpha_3|=|\varphi'(c_2)|\cdot|\alpha_2|<q\cdot|\alpha_2|<q^2|\alpha_1|$$

一般地

$$|\alpha_{n+1}|<q^n|\alpha_1|$$

这就证明了我们的论述。

因为$0<q<1$，随着n增大，数列q，q^2，…，q^n…趋向于零，误差α_{n+1}也趋向于零。换句话说，上面假定的近似值x_1，x_2，…，x_n…逼近ξ时，其误差$|\xi-x_{n+1}|$减少比$|\alpha_1|q^n$快。

同样我们可以证明，如果在区间$[a, b]$上，不等式$|\varphi'(x)|>1$成立。则迭代法发散。

如果函数的微商$\varphi'(x)$在ξ处为零，则迭代法收敛的速度最快。这样，随着我们得到的值接近ξ，$\varphi'(x)$就趋向于零。因为

$$|\alpha_{n+1}|=|\varphi'(c_n)|\cdot|\alpha_n|$$

所以，迭代法收敛的速度随着逼近ξ而增快。

我们用迭代法求平方根时，已经遇到过类似的情况。记得当时我们是用方程$x=\frac{x^2+a}{2x}$代替方程$x^2=a$。然而函数$\varphi(x)=\frac{x^2+a}{2x}$的微商是

$$\varphi'(x)=\frac{(x^2+a)'2x-(x^2+a)(2x)'}{4x^2}$$

$$=\frac{2x\cdot 2x-(x^2+a)\cdot 2}{4x^2}=\frac{x^2-a}{2x^2}$$

（见第18节规则④和第13节公式(55)），所以

$$\varphi'(\sqrt{a})=\frac{(\sqrt{a})^2-a}{2(\sqrt{a})^2}=0$$

因此，函数$\varphi(x)$的微商在$x=\sqrt{a}$点时为零，并且随着逼近点$x=\sqrt{a}$时，加快了方法的收敛。

随着逼近方程的根而加快收敛速度，这一点也是牛顿法的一种特性（上面求平方根的方法就是一种特殊实例）。实际上，我们知道，牛顿方法就是用方程

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

代替方程$f(x)=0$，然后再用逐次逼近法解这个方程。于是我们有

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

而

$$\varphi'(x)=1-\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]'$$

$$=1-\frac{f'(x)[f(x)]'-f(x)[f'(x)]'}{[f'(x)]^2}$$

$$=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

因为方程在点ξ满足$f(\xi)=0$，故$\varphi'(\xi)=0$。所以，如前面所述的那样，随着逼近点ξ而加快了方法的收敛速度。

23. 逐次逼近法解线性方程组

到现在为止，我们已经学会了解一个未知量的方程。下面我们将讨论一次方程组的解法。

假设有m个未知量的m个一次方程*：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mm}x_m=b_m \end{cases} \quad (88)$$

这样的方程组有非常广泛的应用。例如，测量学工作者综合地球表面大面积改造的测量结果，他们有时必须解几百个方程的方程组，工程师们设计刚性结构以及其他专家们在许多特殊的领域中，也必须解这样的方程组。

解这类方程组常用的方法（如未知量消去法）一般都非常麻烦，使用逐次逼近法求解就比较方便。首先我们看一个用逐次逼近法解方程组的例子。

假定有方程组

$$\begin{cases} 10x_1-2x_2+x_3=9 \\ x_1+5x_2-x_3=8 \\ 4x_1+2x_2+8x_3=32 \end{cases}$$

---

* 在这类方程里，我们用字母x_1，x_2，…，x_m表示未知量，用字母a_{ij}表示系数，其中系数的第一个下标表示方程的个数，第二个下标表示未知量的个数。例如a_{47}表示第四个方程第七个变量的系数。

要求出未知量x_1、x_2和x_3的值，精度为0.01。

我们从方程组的第一个方程中解出x_1，从第二个方程中解出x_2，从第三个方程中解出x_3，则方程组为：

$$\begin{cases} x_1 = 0.9 + \qquad 0.2x_2 - 0.1x_3 \\ x_2 = 1.6 - 0.2x_1 + \qquad 0.2x_3 \\ x_3 = 4 \ - 0.5x_1 - 0.25x_2 \end{cases} \qquad (89)$$

任取一组值作为x_1、x_2和x_3的初始近似值，比如取$x_1^{(0)} = 0$，$x_2^{(0)} = 0$，$x_3^{(0)} = 0$，把这组值代入方程组（89）的右端并计算可得到x_1、x_2和x_3的下一次近似值：

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.9 \\ x_2^{(1)} = 1.6 \\ x_3^{(1)} = 4 \end{cases}$$

把得出的这组近似值再代入方程组（89）右端计算又得到下一次近似值：

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.9 + 0.2 \times 1.6 - 0.1 \times 4 = 0.82 \\ x_2^{(2)} = 1.6 - 0.2 \times 0.9 + 0.2 \times 4 = 2.22 \\ x_3^{(2)} = 4 - 0.5 \times 0.9 - 0.25 \times 1.6 = 3.15 \end{cases}$$

一般地，如果近似值$x_1^{(n)}$，$x_2^{(n)}$和$x_3^{(n)}$已经求出，则要求下一次近似值就使用公式

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = 0.9 + 0.2x_2^{(n)} - 0.1x_3^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} = 1.6 - 0.2x_1^{(n)} + 0.2x_3^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} = 4 - 0.5x_1^{(n)} - 0.25x_2^{(n)} \end{cases} \qquad (90)$$

此例中各次计算结果如表2。

表2

n	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(n)}$	0.9	0.82	1.03	1.01	1.00	1.00
$x_2^{(n)}$	1.6	2.22	2.07	2.00	1.99	2.00
$x_3^{(n)}$	4.0	3.15	3.03	2.97	3.00	3.00

我们看到，在精度要求内，下列等式成立：

$$\begin{cases} x_1^{(5)}=x_1^{(6)} \\ x_2^{(5)}=x_2^{(6)} \\ x_3^{(5)}=x_3^{(6)} \end{cases} \qquad (91)$$

在方程组（90）中取$n=5$并考虑等式（91），在精度要求内我们得到

$$\begin{cases} x_1^{(5)}\approx 0.9+0.2x_2^{(5)}-0.1x_3^{(5)} \\ x_2^{(5)}\approx 1.6-0.2x_1^{(5)}+0.2x_3^{(5)} \\ x_3^{(5)}\approx 4-0.5x_1^{(5)}-0.25x_2^{(5)} \end{cases}$$

（事实上，等式是精确的，不过这并不要紧。）由此得出$x_1^{(5)}=1.00$，$x_2^{(5)}=2.00$，$x_3^{(5)}=3.00$（在精度要求内）是方程组的解。

一般的方程组也可用同样的方法求解*。假定有方程组（88），从第一个方程中解出x_1，从第二个方程中解出x_2，如此等等。则（88）式为：

* 这一节的以下部分，对于初学者可以省略。

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{1m}}{a_{11}}x_m \\
x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - & \cdots - \dfrac{a_{2m}}{a_{22}}x_m \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x_m = \dfrac{b_m}{a_{mm}} - \dfrac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1 - & \cdots - \dfrac{a_{m,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1}
\end{cases}
\qquad (92)
$$

设$x_1^{(1)}$，$x_2^{(1)}$，…，$x_m^{(1)}$为未知量x_1，x_2，…，x_m的一组初始近似值，把这组值代入（92）式右端计算，我们得到所求未知量的第二次近似值

$$
\begin{cases}
x_1^{(2)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(1)} - \cdots - \dfrac{a_{1m}}{a_{11}}x_m^{(1)} \\
x_2^{(2)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(1)} - & \cdots - \dfrac{a_{2m}}{a_{22}}x_m^{(1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x_m^{(2)} = \dfrac{b_m}{a_{mm}} - \dfrac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1^{(1)} - & \cdots - \dfrac{a_{m,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1}^{(1)}
\end{cases}
$$

同样地，如果第n次近似值已经求出，则下一次近似值的计算公式是

$$
\begin{cases}
x_1^{(n+1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(n)} - \cdots - \dfrac{a_{1m}}{a_{11}}x_m^{(n)} \\
x_2^{(n+1)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(n)} - & \cdots - \dfrac{a_{2m}}{a_{22}}x_m^{(n)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x_m^{(n+1)} = \dfrac{b_m}{a_{mm}} - \dfrac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1^{(n)} - & \cdots - \dfrac{a_{m,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1}^{(n)}
\end{cases}
\qquad (93)
$$

现在，我们考虑一个与逐次逼近法解方程组无关的问题，即是用解方程组的方法求某种逼近过程的极限状态。

设有3只水桶，第一只桶里装有12升水，第二只和第三只是空桶。先把第一只桶里的水倒一半到第二只桶里，然后把第二只桶里的水倒一半到第三只桶里，最后再把第三只桶里的水倒一半到第一只桶里。这样重复循环倾倒20次后，求每只桶里各有多少公升水（精度为0.0001升）？

明显地，这个问题就是讨论逐次逼近水分布的极限状态。这种极限状态表示循环倾倒水不再改变水的分布情况。如果开始循环倾倒时，第一只桶里有x升水，第二只桶里有y升水，则第三只桶里就有（$2-x-y$）升水（水的总数在倾倒过程中不改变）。则循环一轮倾倒的情况如下：

	第一只桶	第二只桶	第三只桶
初始状态	x	y	$12-x-y$
第一次倾倒后	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}+y$	$12-x-y$
第二次倾倒后	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}$	$12-\frac{3}{4}x-\frac{y}{2}$
第三次倾倒后	$6+\frac{x}{8}-\frac{y}{4}$	$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}$	$6-\frac{3}{8}x-\frac{y}{4}$

如果这样倾倒后，每只桶里的水数量不变，即满足下面方程

$$\begin{cases} x=6+\frac{x}{8}-\frac{y}{4} \\ y=\frac{x}{4}+\frac{y}{2} \end{cases}$$

解此方程，我们得到$x=6$，$y=3$。因此，水的极限分布状态是第一只桶里有6升水，第二只桶里有3升水，第三只桶里也有3升水。

让我们再看水的分布逼近极限状态的速度是多少。假设第一只桶里有a升水，第二只有b升水，经过一轮循环倾倒后，第一只桶里的水是

$$a_1 = 6 + \frac{a}{8} - \frac{b}{4} \qquad (94)$$

第二只桶里的水是

$$b_1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} \qquad (95)$$

令$\alpha = a - 6$，$\beta = b - 3$，$\alpha_1 = a_1 - 6$，$\beta_1 = b_1 - 3$，则由等式（94）和（95）得：

$$\alpha_1 = a_1 - 6 = \frac{a-6}{8} - \frac{b-3}{4} = \frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4}$$

$$\beta_1 = b_1 - 3 = \frac{a-6}{4} + \frac{b-3}{2} = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}$$

经过第二轮循环以后，误差将是

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{8} - \frac{\beta_1}{4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{64}\alpha - \frac{5}{32}\beta$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\beta_1}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{32}\alpha - \frac{3}{16}\beta$$

所以，如果$|\alpha| < \varepsilon$，$|\beta| < \varepsilon$，则

$$|\alpha_2| < \frac{13}{64}\varepsilon \approx 0.2\varepsilon$$

$$|\beta_2|<\frac{11}{32}\varepsilon\approx0.34\varepsilon$$

这说明经过两轮循环倾倒后，误差α和β至少减小为1/3倍，因此经过20轮循环倾倒后，误差至少减小到1/7000（$3^{10}\approx70000$）。所以，循环倾倒20轮后，在精度0.0001内水的分布状态是：第一只桶里有6升水，第二只和第三只桶里各有3升水。

24. 逐次逼近法解非线性方程组

逐次逼近法（迭代法）还可以用来解某些非线性方程组。例如，考虑方程组

$$\begin{cases} x=2+\dfrac{x^2+y}{20} \\ y=1+\dfrac{x+y^2}{20} \end{cases} \qquad (96)$$

选取$x_0=0$，$y_0=0$作为初始近似值。把这组值代入方程组等式右端计算得到下一组近似值$x_1=2$，$y_1=1$。再将这组值代入（96）式右端计算，我们又得到

$$\begin{cases} x_2=2+\dfrac{2^2+1}{20}=2.25 \\ y_2=1+\dfrac{2+1^2}{20}=1.15 \end{cases}$$

继续下去，我们可得出

$$\begin{cases} x_3=2+\dfrac{2.25^2+1.15}{20}=2.31 \\ y_3=1+\dfrac{2.25+1.15^2}{20}=1.18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4=2+\dfrac{2.31^2+1.18}{20}=2.33 \\ y_4=1+\dfrac{2.31+1.18^2}{20}=1.18 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_5 = 2 + \dfrac{2.33^2 + 1.18}{20} = 2.33 \\
y_5 = 1 + \dfrac{2.33 + 1.18^2}{20} = 1.18
\end{cases}
$$

可以看出，$x_4 = x_5 = 2.33$，$y_4 = y_5 = 1.18$也满足精度0.01，所以方程组的解是

$$
\begin{cases}
x = 2.33 \\
y = 1.18
\end{cases}
$$

一般地，如果有方程组

$$
\begin{cases}
x = \varphi(x,\ y) \\
y = \psi(x,\ y)
\end{cases}
\qquad (97)
$$

其中$\varphi(x,\ y)$和$\psi(x,\ y)$是某种函数。我们选取初始近似值x_0和y_0代入（97）式右端并按公式

$$
\begin{cases}
x_{n+1} = \varphi(x_t,\ y_n) \\
y_{n+1} = \psi(x_n,\ y_n)
\end{cases}
\qquad (98)
$$

逐次进行计算。如果对于某个n值，等式$x_{n+1} \approx x_n$，$y_{n+1} \approx y_n$已满足精度要求，则我们就取方程组的解为$x = x_n$，$y = y_n$。

含有三个或更多未知量的方程组也可用同样的方法求解。

现在我们来确定保证逐次逼近法解方程组的收敛条件。

假设方程组中的$\varphi(x,\ y)$和$\psi(x,\ y)$是定义在x、y平面上一个有界闭域D上的函数，也就是说，假设区域D全部在某矩形的内部并包括它的边界点。比如圆、多边形、椭圆等都是这样区域的实例。此外，我们还假设函数$\varphi(x,\ y)$，$\psi(x,\ y)$在区域D上连续。$\varphi(x,\ y)$和$\psi(x,\ y)$在区域D上定义了一种映射，它把区域D映射到同一平面的某个区域上。

为了求区域D上点$A_0(x_0, y_0)$的映射点，将x，y值代入$\varphi(x, y)$和$\psi(x, y)$计算，其结果就是M_0点的象的坐标。例如，假设

$$\begin{cases}\varphi(x, y)=x^2+y^2\\ \psi(x, y)=2xy\end{cases}$$

则点$M_0(1, 3)$被映射到点$N_0(10, 6)$。

以后，我们用字母Φ表示函数$\varphi(x, y)$和$\psi(x, y)$给出的映射，$\Phi(M)$表示点M在映射下的象，$\Phi(D)$表示区域D作为一个整体在映射下的象。

假定映射Φ把区域D映射成它的子区域$D_1=\Phi(D)$，则应用同样的映射，可以把区域D_1映射到它的子区域$D_2=\Phi(D_1)$上。当然D_2也含于区域D里面。继续这种过程，我们得到一系列一个含于一个的区域D，D_1，D_2，…，D_m，…（图21）。

如果对于区域D内任意两点M_1和M_2，存在一数q（$0<q<1$），使得不等式

$$r(\Phi(M_1), \Phi(M_2))\leqslant q\cdot r(M_1, M_2)$$

成立。我们就称映射Φ是一种压缩。这里$r(M, N)$表示点M、N之间的距离。

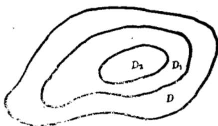


图21

就单变量来说，下面的命题是能够被证明的：

假设映射Φ把区域D映射到它的子区域，且Φ是一种压缩，则在区域D上存在唯一的点N，$=N\ \Phi(N)$。并且这点属于所有区域D_n，点N的坐标ξ、η满足方程组（97），即

$$\begin{cases} \xi=\varphi(\xi, \eta) \\ \eta=\psi(\xi, \eta) \end{cases}$$

若是单变量，ξ和η就是由迭代法计算出的近似值。如果 $M_0(x_0, y_0)$是区域D上任一点，且$M_{n+1}=\Phi$（即$x_{n+1}=\varphi(x_n, y_n)$，$y_{n+1}=\psi(x_n, y_n)$），则点列$M_0$，$M_1$，…，$M_n$，…收敛于一固定映射点N。

25. 修正距离

迭代过程的收敛性，要求Φ是一个压缩映射仅是一个充分条件，而不是必要条件。映射Φ可能不是一种压缩，但迭代过程仍然是收敛的。例如，由函数$\varphi(x, y)=1+2y$，$\psi(x, y)=3+\frac{x}{8}$定义的映射Φ不是一种压缩，因为如果取$A(8, 0)$和$B(8, 4)$两点，我们得到

$$r(A, B)=4,\ \Phi(A)=(1, 4),\ \Phi(B)=(9, 4)$$

和

$$r(\Phi(A), \Phi(B))=8>r(A, B)$$

然而，无论我们选取怎样的点M_0，得出的点列M_0，M_1，…，M_n，…将收敛于点$N(9\frac{1}{3}, 4\frac{1}{6})$。

有时候，如果修正平面上两点间距离的定义，就能确定迭代过程的收敛性。实际上，两点间的距离可以有不同的定义，对于旅行者来说，A、B两点之间的距离通常是计算他从A到达B所花的时间。图22a描述的情况说明，A、B两点间的距离等于线段AC、CD和DB长度之和（从A点到B点，必须先到达桥CD，过桥后再从D到B）。在一个平面上，如果只能沿着相互垂直的方向移动（图22b），则A、B两点间的距离应该定义为线段AC和CB的长度之和。在另一些情况下，A、B两点间的“距离”定义为线段AC和CB中的长者是更方便的。平面上两点间的“距离”还可建立另外的定义

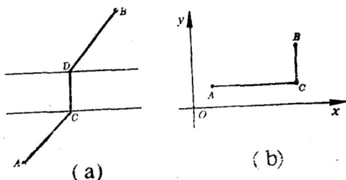


图22

（关于距离的不同定义从*Yu*.*A*.斯里德(Yu.A.Schreider)的《什么是距离》一书中可得到详细的说明）。

两点间的距离$r(A, B)$通常具有下列性质：

①任意两点A、B间的距离$r(A, B)\geqslant 0$当且仅当A、B两点重合时，$r(A, B)=0$。

②任意两点A、B间的距离满足对称性：

$$r(A, B)=r(B, A)$$

③对任意A、B、C三点，满足不等式

$$r(A, C)\leqslant r(A, B)+r(C, B)$$

如果某些对象的集，其距离的定义具有上述性质，则称此集为一个度量空间，它的元素称为这个空间中的点，度量空间中的点甚至可能是函数。对于区间$[a, b]$上的连续函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$它们之间的距离可定义为$|\varphi(x)-\psi(x)|$在该区间上的最大值：

$$r(\varphi, \psi)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|$$

我们已经看到，前面所有定义的距离都是满足条件①～③的，即把平面转化成度量空间有许多不同的方法。

这里有一个非常有趣的例子，它定义的距离满足条件①和③，但不满足条件②。假设在山坡地带，A、B 两点间的距离是由从 A 走到 B 的时间来度量，因为上山和下山所花的时间不一样，所以，$r(A, B) \neq r(B, A)$。

对于逐次逼近法解方程组

$$\begin{cases} x=\varphi(x, y) \\ y=\psi(x, y) \end{cases} \qquad (99)$$

满足下面的条件就收敛：

映射 Φ 是由函数 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 定义，它把区域 D 映射到它自己的子区域，并且至少对某一种"距离" $r(A, B)$ 是一种压缩，也就是说，存在数 q（$0<q<1$），使得对于 D 上任意两点 M_1 和 M_2 满足不等式

$$r(\Phi(M_1), \Phi(M_2)) \leqslant q\,r(M_1, M_2)$$

例如，取函数 $\varphi(x, y)=1+2y$，$\psi(x, y)=3+\frac{x}{8}$，如果两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 间的距离由下式定义：

$$r(A, B)=\left|\frac{1}{2}(x_2-x_1)+2(y_2-y_1)\right| + \left|\frac{1}{2}(x_2-x_1)-2(y_2-y_1)\right|$$

则由 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 定义的 Φ 恰好是具有 $\frac{1}{2}$ 因子的压缩。

比如，对于 $A(8, 0)$ 和 $B(8, 4)$，有 $r(A, B)=16$，而对于它们的象 $r(A)$ 和 $r(B)$ 有

$$r(\Phi(A), \Phi(B))=8$$

映射的结果是"距离"比原来小了 $1/2$。这就是为什么用迭代法解方程组

$$\begin{cases} x = 1 + 2y \\ y = 3 + \dfrac{x}{8} \end{cases}$$

时，虽然对与之相关的通常距离映射Φ不是一种压缩，但迭代过程仍然是收敛的道理。

26.逐次逼近法解线性方程组的收敛检验

现在我们把前面论述过的收敛检验应用于线性方程组。通过选择不同形式的“距离”，我们将得到各种收敛检验，并把这些检验用方程组的系数来表示。

首先，考虑两个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases} \qquad (100)$$

设$a_{11}\neq 0$，$a_{22}\neq 0$，从第一个方程中解出x，第二个方程中解出y，我们得到一个方程组

$$\begin{cases} x=\dfrac{b_1}{a_{11}}-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}y \\ y=\dfrac{b_2}{a_{22}}-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x \end{cases}$$

为简单起见，令$\dfrac{b_1}{a_{11}}=\beta_1$，$-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}=\alpha_1$，$\dfrac{b_2}{a_{22}}=\beta_2$，$-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}=\alpha_2$，则方程组为

$$\begin{cases} x=\alpha_1 y+\beta_1 \\ y=\alpha_2 x+\beta_2 \end{cases} \qquad (100)$$

这样，映射Φ由函数$\varphi(x,y)=\alpha_1 y+\beta_1$和$\psi(x,y)=\alpha_2 x$

$+\beta_2$定义。

现在，我们来求系数α_1、α_2应满足什么条件时，映射Φ才是一种压缩。

大家知道，$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$两点之间的距离是

$$\gamma(A, B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

且映射Φ把点A映射到点$A_1(\alpha_1 y_1+\beta_1,\ \alpha_2 x_1+\beta_2)$，把点$B$映射到点$B_1(\alpha_1 y_2+\beta_1,\ \alpha_2 x_2+\beta_2)$，$A_1$、$B_1$两点之间的距离是

$$\gamma(A_1,\ B_1)=\sqrt{(\alpha_1 y_2-\alpha_1 y_1)^2+(\alpha_2 x_2-\alpha_2 x_1)^2}$$
$$=\sqrt{\alpha_1{}^2(y_2-y_1)^2+\alpha_2{}^2(x_2-x_1)^2}$$

用q表示$|\alpha_1|$、$|\alpha_2|$中的最大数，即：

$$q=\max(|\alpha_1|,\ |\alpha_2|)$$

则由（101）式得不等式

$$\gamma(A_1,\ B_1)\leqslant q\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=q\cdot\gamma(A,\ B)$$

明显地，如果$<q\ 1$，则映射Φ是整个平面上的一种压缩。倘若这样，正如我们所知逐次逼近法收敛。

于是，我们证明了，如果

$$\max(|\alpha_1|,\ |\alpha_2|)<1 \qquad (102)$$

则逐次逼近法解方程组（100）总是收敛的。

现在，我们再把上面叙述的收敛作一检验，直接用方程组（100′）的各项系数表示出来。回忆等式

$$\alpha_1=-\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$\alpha_2=-\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

将它们代入条件（102）式，我们得到下面结论：

用逐次逼近法解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

收敛的充分条件是不等式

$$\max\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|,\ \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|\right)<1$$

满足.

这个条件说明，方程组各行的系数中，主对角线上的系数应该大于非主对角线上的系数．例如解方程组

$$\begin{cases} x-3y=-11 \\ 6x+y=10 \end{cases}$$

时，由于这种原因，我们应该从第一个方程中解出y，第二个方程中解出x．即

$$\begin{cases} y=\dfrac{11}{3}+\dfrac{x}{3} \\ x=\dfrac{5}{3}-\dfrac{y}{6} \end{cases}$$

有时候，对方程组适当变换，用另外的与x、y成比例的未知量代换方程中的未知量x和y是很有用的。例如考虑方程组

$$\begin{cases} 12x+y=14 \\ 3x-2y=-1 \end{cases} \tag{103}$$

对此方程组

$$\max\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|,\ \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|\right)=\max\left(\frac{1}{12},\ \frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

当然不满足逐次逼近法收敛的充分条件．但如果令$x=\frac{1}{3}z$，则我们得到方程组

$$\begin{cases} 4z+y=14 \\ z-2y=-1 \end{cases} \qquad (104)$$

对此方程组

$$\max\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|, \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|\right)=\max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

这说明，方程组（104）能够用逐次逼近法求解。

当然，解（104）那样简单的方程组，用不着使用逐次逼近法。但是对于多个未知量的方程组，这种方法非常有用。我们解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (105)$$

时，收敛的充分条件几乎与两个未知量的方程组一样，实际上有下面的论述：

如果方程组（105）的系数满足下列条件之一，则用逐次逼近法解方程组（105）收敛。

$$①\max_i \sum_{j=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1 \qquad (106)$$

$$②\max_j \sum_{i=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1 \qquad (107)$$

$$③\max_{k}\sum_{i,j=1}^{n(k)}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^{2}<1 \qquad (108)$$

次逼近法解方程组（105）收敛。

在（106）和（107）式中，符号"1"的意思是应除去和式中$i=j$的项，（108）式中的符号"（k）"表示应除去和式中$i=j$和$i=k$的项。要注意的是，如果

$$\sum_{i,j=1}^{n'}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^{n}<1 \qquad (109)$$

（其中"1"仍表示除去$i=j$的项）则条件③一定满足，在大多数计算数学书中，条件③就是（109）的形式。

与前面论述的一样，如果我们要求映射

$$\begin{cases} x_1 \longrightarrow \dfrac{b_1}{a_{11}} \qquad -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2\cdots-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ x_2 \longrightarrow \dfrac{b_2}{a_{22}}-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1-\cdots \qquad -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n \longrightarrow \dfrac{b_n}{a_{nn}}-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1-\cdots\cdots \qquad -\dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \end{cases}$$

相对于某种距离来说是一种压缩，则马上会得到条件（106）～（108）。实际上，条件（106）相当于A（x_1，x_2，……，x_n）和B（y_1，y_2，…，y_n）两点间的距离为：

$$\gamma(A、B)=\max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \cdots, |x_n-y_n|)$$

条件（107）相当于A、B两点的距离为：

$$\gamma(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

条件（108）相当于A、B两点的距离为：

$$\gamma(A,B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

与两个变量的情况一样，有时用与其成比例的新的变量代换原方程中的未知量x_1，x_2，…，x_n是很有用的. 即令$y_1=p_1x_1$，$y_2=p_2x_2$，…，$y_n=p_ny_n$，其中$p_1>0$，$p_2>0$，…，$p_n>0$。

在这种代换下，条件（106），（107），（108）分别为：

$$(1')\quad \max_i \sum_{j=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\frac{p_i}{p_j}<1 \qquad (106')$$

$$(2')\quad \max_i \sum_{i=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\frac{p_i}{p_j}<1 \qquad (107')$$

$$(3')\quad \max_k \sum_{i,j=1}^{n(k)} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^2\frac{p_i^2}{p_j^2}<1 \qquad (108')$$

特别地，当$p_i=|a_{ii}|$时，这些条件成为：

$$(1'')\quad \max_i \sum_{i}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right|<1 \qquad (106'')$$

$$(2'')\quad \max_j \sum_{i=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right|<1 \qquad (107'')$$

$$(3'')\quad \max_k \sum_{i,j=1}^{n(K)} \left|\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right|^2<1 \qquad (108'')$$

作为例子，我们考虑方程组

$$\begin{cases} x-0.6y-0.5z=-2.6 \\ -0.2x+y-0.4z=3 \\ -0.1x+0.5y+z=3.9 \end{cases}$$

对这个方程组，条件①、②以及条件（1′）、（2′）都不满足。同样地，（109）式也不成立，因为非主对角线元素的平方和等于1.07. 但是

$$\max_i \sum^{(i,j)} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^2 = \max(0.6^2+0.5^2+0.2^2+0.4^2,$$

$$0.6^2+0.5^2+0.1^2+0.5^2,\ 0.2^2+0.4^2+0.1^2+0.5^2) = 0.87 < 1$$

所以，这个方程组可以用逐次逼近法求解。

值得注意的是上面论述的所有条件，都仅仅是逐次逼近法收敛的充分条件而不是必要条件。对两点间的距离和压缩条件选择不同的定义，我们就能得出新的收敛条件. 然而，在这里我们不继续往下讨论这个问题了。

第5节中叙述过的要点也同样适用于线性方程组. 例如近似值的最终结果并不依赖于初始近似值的选择. 所以，在某次计算中发生了错误不会使后面的计算失效，而仅仅是延迟了向最终结果逼近的时间.

解线性方程组，逐次逼近法的形式是多种多样的. 例如在有的方法里，求出近似值$x_1^{(n+1)}$后，就以它连同$x_3^{(n)}$，$x_4^{(n)}$，$\cdots x_m^{(n)}$一起计算$x_2^{(n+1)}$，$x_2^{(n+1)}$求出以后，又以$x_1^{(n+1)}$，$x_2^{(n+1)}$，$x_4^{(n)}$，$\cdots$，$x_m^{(n)}$计算$x_3^{(n+1)}$，如此等等。逐次逼近法用于解线性方程组的情况，在另外的书里有更详细的叙述。

27. 几何学中的逐次逼近法

我们已经叙述了逐次逼近法解方程和方程组的问题。逐次逼近法还可用于某些几何问题，例如计算圆周长的问题。正如大家所知，计算圆的周长实际上是先计算圆内接正方形的周长，再计算内接正8边形、正16边形的周长，如此等等。计算出的这些周长值成一数列，它的极限值就等于圆的周长。在计算过程中，每一次计算都要借助于前次计算出的结果。这即是采用了下面的方法：

用A_n表示正2^n边形的边，P_n表示正2^n边形的周长. 例如A_2表示正方形的边。所以$A_2=R\sqrt{2}$，$P_2=4R\sqrt{2}$. 假设我们已经求出了P_n，则明显地有

$$A_n=\frac{P_n}{2^n}$$

在几何学里已经证明，内接正$2n$边形的边a_{2n}可以通过内接正n边形的边a_n和圆的半径R由下式表示•

$$a_{2n}=R\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2/R^2}} \qquad (110)$$

因而，内接正2^{n+1}边形的边A_{n+1}可以通过内接正2^n边形的边A_n由公式表示，即

$$A_{n+1}=R\sqrt{2-\sqrt{4-A_n^2/R^2}}$$

因为

$$A_n=\frac{P_n}{2^n},\quad A_{n+1}=\frac{P_{n+1}}{2^{n+1}}$$

由此可得

$$P_{n+1}=2^{n+1}R\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{P_n^2}{2^{2n}R^2}}} \quad (110')$$

数列P_2，P_3，…，P_n，…趋向于圆周长度，即趋向于$2\pi R$的值．所以，可以把公式（110)看成是借助于逐次逼近法求$2\pi R$值的计算公式。用这种方法可以计算π的值到任意位小数。

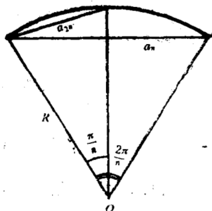
另外还有一种计算π的近似值的方法，叫等周长法。这种方法用一个具有同样周长值的正2^{n+1}边形替换正2^n边形．假定我们用l_n表示正2^n边形的边心距，用r_n表示2^n边形外接圆半径，同样，用l_{n+1}表示正2^{n+1}边形的边心距，r_{n+1}表示正2^{n+1}边形的外接圆半径。

设AB是内接于半径为r_n的圆的正2^n边形的边(图23)。将弧AB的中点C分别与A、B连接，并且过三角形ACB的AC边和BC边的中点D、E作线段DE。明显地，角DoE等于角AoB的一半。因此，DE是内接于半径为oD的圆的正2^{n+1}边形的一条边。因为$DE=\frac{1}{2}AB$，所以正2^{n+1}边形的周长等

这个公式很容易用三角学导出．明显地，如果a_n是内接正n边形的边，a_{2n}是内接正$2n$边形的边（如下图），则

$$a_n=2R\sin\frac{\pi}{n}, a_{2n}=2R\sin\frac{\pi}{2n}$$

因为$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$，由此得出



$$a_{2n}=2R\sin\frac{\pi}{2n}=2R\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}}$$

$$=R\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin\frac{2\pi}{n}}}=R\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{a_n^2}{R^2}}}$$

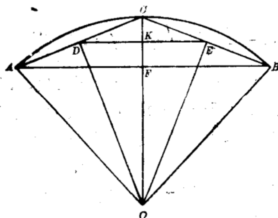


图23

于正2_n边形的周长。这即是说，$r_{n+1}=OD, l_{n+1}=OK$.

可以很容易地计算出

$$l_{n+1}=OK=\frac{r_n+l_n}{2} \qquad (111)$$

然后，由直角三角形ODC又可求出

$$r_{n+1}=\sqrt{r_n l_{n+1}} \qquad (112)$$

公式（111）和（112）就是以r_n、l_n来表示r_{n+1}和l_{n+1}的。

随着n的增加，多边形的周长并不改变，并且数列l_n和r_n趋向于同一极限值，这极限值就等于圆的半径，该圆的周长就等于多边形的周长。如果我们最初选择一个周长等于2的多边形，则r_n和l_n趋向于数$\frac{1}{\pi}$，即

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{\pi}, \qquad \lim_{n\to\infty} l_n=\frac{1}{\pi}$$

例如，如果开始选择一个边长为$\frac{1}{2}$的正方形．我们有$r_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$l_2=\frac{1}{4}$.所以，有下面的叙述：

如果选取$\gamma_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$l_2=\frac{1}{4}$，并由公式(111)和（112）计算$\gamma_{n+1}$和$l_{n+1}$（$n=2$，$3$，…）。则我们将得出

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\lim_{n\to\infty}l_n=\frac{1}{\pi}$$

这个公式可以用来求$\frac{1}{\pi}$的近似值。为计算出$\frac{1}{\pi}$的值，一般要连续计算直到γ_n和l_n的值都在要求的精度之内．此时γ_n或l_n就是$\frac{1}{\pi}$在精度要求内的值。

28. 结束语

本书使我们了解了逐次逼近法对制定计划、求方根、解方程、计算圆周长等各种各样问题的应用。但所有这些根本不能包括完逐次逼近法的应用。大量的实际问题，导出的是微分方程（包含有未知函数的微商）、积分方程和各类更复杂的方程。求解这些方程的近似解，最有效的方法之一就是应用逐次逼近法，当然，就这些应用来说，比代数方程要复杂得多。然而，可以这样认为，如果不用逐次逼近法，当今需要着手处理的大量的物理上和技术上的问题，没有一个能解决。例如，计算人造卫星运行轨道，设计一座原子能反应堆，研究原子的结构等等。不过，逐次逼近法对这些问题的应用已超出了初等数学的领域，远远超过了本书论述的范围。

练习

下面，我们列出一些求方程近似解的习题，便于读者能够检查自己对书中讨论的各种方法的掌握程度。

一、用迭代法解下列方程*。

1. $x=\frac{1}{(x+1)^2}$

2. $x=(x+1)^3$

3. $x=4+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

4. $x=2\pm\sqrt[4]{x}$

5. $x=\sqrt[4]{5-x}$

6. $4-x=\text{tg}x$

7. $x^2=\sin x$

8. $x^3=\sin x$

9. $x=\arcsin\frac{x+1}{4}$

10. $x=\cos x$

11. $x=\frac{1}{\cos x}$

12. $x=1+\frac{1}{10}\sin x$

* 有些习题，必须先把方程改写为$x=\varphi(x)$的形式。

13. $x=\pm\sqrt{\log(x+2)}$

14. $x^2=\ln(x+1)$

15. $\ln x=4-x^2$

16. $\ln x=2-x$

17. $x^2=e^x+2$

18. $\lg x=0.1x$

19. $\mathrm{tg}x=\lg x$

20. $x=\frac{1}{10}e^{-x}$

二、用牛顿法解下列方程。

21. $x^3-5x+1=0$

22. $x^3-9x^2+20x-11=0$

23. $x^3-3x^2-3x+11=0$

24. $x^5+5x+1=0$

25. $\sin x+x=1$

26. $x^2-10\lg x-3=0$

三、用逐次逼近法解下列方程组。要求精度为0.001.

27. (a) $\begin{cases} x= & 0.2y-0.1z+0.898 \\ y=0.3x & +0.15z+1.383 \\ z=0.25x-0.4y & +3.677 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x=\frac{1}{4}\sin(x+y)+0.336 \\ y=-\frac{1}{4}\sin(x-y)+0.362 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x=\sqrt{x+2y}-0.710 \\ y=\sqrt{y-x}+1 \end{cases}$

练习答案

1．解：设$\varphi(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$，则$\varphi'(x)=-\frac{2}{(x+1)^3}$。

我们有$\varphi(0)=1>0$，$\varphi(1)=\frac{1}{4}<1$，故在区间$[0,1]$里包含有方程的一个根。但是在此区间上不能应用逐次逼近法，这是因为$|\varphi'(0)|=2>1$。为此缩小区间范围。注意到$\varphi(0.4)=\frac{1}{1.96}>0.4$，所以，方程的根位于区间$[0.4,1]$上。

如果$0.4\leqslant x\leqslant 1$，则$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{2}{1.4^3}<1$。在此区间上可以应用逐次逼近法，取$x_1=0.4$，经过11次逼近计算后得到

$$x_{11}\approx\varphi(x_{11})\approx 0.4655$$

所以，方程精度为0.001的根是$x=0.4655$.

2．解：设$\varphi(x)=(x+1)^3$，则$\varphi'(x)=3(x+1)^2$，且$\varphi(-2)=-1>-2$，$\varphi(-3)=-8<-3$。所以在区间$[-3,-2]$上有方程的根，然而在此区间上，$|\varphi(x)|>1$，不能应用逐次逼近法。

把方程改写为

$$x=\sqrt[3]{x}-1$$

则有$\psi'(x)=\sqrt[3]{x}-1$，$\psi'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$。在区间〔$-3$，$-2$〕上，$|\psi'(x)|\leqslant\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}<1$，可以用逐次逼近法。取$x_1=-2$，得到$x_6=\psi(x_6)\approx-2.325$。

所以在精度0.001内，方程的根为$x=-2.325$。

3.解：设$\varphi(x)=4+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$，则

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$$

图24表明，直线$y=x$与曲线$y=4+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$有两个交点，分别在区间〔$-1$，$0$〕和〔$4$，$5$〕上。下面逐一进行求解。

在区间〔4，5〕上，有$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{2}{15\sqrt[3]{45}}<1$，取$x_1=4$，计算得$x_3=\varphi(x_3)\approx4.870$。所以在精度0.001内有

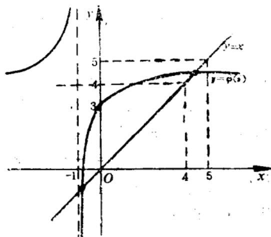


图 24

$x=4.870$。

在区间〔-1，0〕上，不能直接用逐次逼近法，把方程改写为

$$(x-4)^3=\frac{x-1}{x+1}$$

由此得

$$\frac{x-1}{(x-4)^3}=x+1$$

即
$$x=\frac{x-1}{(x-4)^3}-1$$

这里，$\psi(x)=\dfrac{x-1}{(x-4)^3}-1$，$\psi'(x)=\dfrac{-2x-1}{(x-4)^4}$.明显地，对 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 有 $|\psi'(x)|\leqslant\dfrac{1}{256}<1$，可以用逐次逼近法求解。取$x_1=0$，得$x_2=\psi(x_2)\approx-0.9840$，即在精度0.0001内，有$x=-0.9840$。

所以，我们求得方程的两个根是$x=-0.9840$和$x=4.870$。

4．解：设$\varphi_1(x)=2+\sqrt[4]{x}$，$\varphi_2=2-\sqrt[4]{x}$。由图25可以看出，方程$x=2+\sqrt[4]{x}$在区间〔3，4〕上有一根。在此区间上

$$|\varphi_1'(x)|=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}<1$$

可以用逐次逼近法。取$x_1=4$，得$x_4=\varphi_1(x_4)\approx3.353$. 因此，在精度0.001内$x=3.353$。

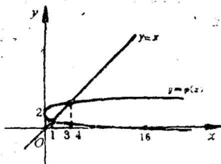


图25

现在解方程$x=2-\sqrt[4]{x}$。它的根显然是$x=1$。

所以方程的根是$x=3.353$和$x=1$。

5．解：这里，$\varphi(x)=\sqrt[3]{5-x}$，$\varphi'(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(5-x)^2}}$，

且有$\varphi(1)=\sqrt[3]{4}<2$，$\varphi(2)=\sqrt[3]{3}>1$。

所以，方程在区间〔1，2〕上有一根。在此区间上$|\varphi'(x)|\leqslant\dfrac{1}{3\sqrt[3]{9}}<1$。取$x_1=1$，计算得$x_5=\varphi(x_5)\approx1.516$。

因此，在精度0.001内，方程的根是$x=1.516$。

6．解：把方程改写为

$$x=\mathrm{arctg}(4-x)$$

在这里，$\varphi(x)=\mathrm{arctg}(4-x)$，$\varphi(1)=\mathrm{arctg}3\approx1.25$，$\varphi(2)=\mathrm{arctg}2\approx1.10$。可见，方程在区间〔1，2〕上有一根。

在此区间上，$|\varphi'(x)|=\dfrac{1}{1+(4-x)^2}\leqslant\dfrac{1}{5}$，能够用逐次逼近法。取$x_1=1$，得$x_4=\varphi(x_4)\approx1.225$。

所以，在精度0.001内，$x=1.225$。

7．解：方程有一根为$x=0$。

从图26可以看出，方程的另一根是正数，所以应满足方程

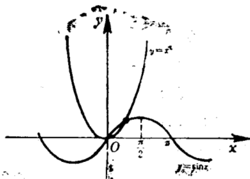


图26

$$x=\sqrt{\sin x}$$

这里，$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$，$\varphi'(x)=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$。因为

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\sin\frac{1}{2}}\approx\sqrt{0.4794}>\frac{1}{2}$$

$$\varphi(1)=\sqrt{\sin 1}\approx\sqrt{0.8414}<1$$

所以，方程在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上有一根。在此区间上

$$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}}}\approx\frac{0.8703}{1.3846}<1$$

逐次逼近法收敛。取$x_1=1$，得到$x_7=\varphi(x_7)=0.8768$。所以，在精度0.0001内，方程的第二个根是$x=0.8768$。

8. 解：这个方程的解法与上题一样。先把方程写为

$$x=\sqrt[3]{\sin x}$$

再取$x_1=1$，计算得到$x_6=\varphi(x_6)\approx0.9286$。所以，方程的一个根等于0.9286，精度为0.001。

因为方程两边都是奇函数，所以方程还有一根等于-0.9286。

方程的第三个根是$x=0$。

9. 解：原方程可以写为

$$\frac{x+1}{4}=\sin x\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

从图27可以看出，方程在0和$\frac{\pi}{2}$之间有一单根。

这里，$\varphi(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{4}$，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{16-(x+1)^2}}$，

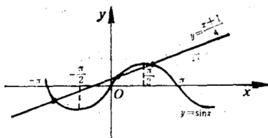


图 27

在区间$(0, \frac{\pi}{2})$上有

$$|\varphi'(x)|<\frac{1}{\sqrt{3}}<1$$

取$x_1=0$，得$x_8=\varphi(x_8)\approx 0.3422$。

所以，$x=0.3422$是方程具有精度0.0001的根。

10. 解：因为$\cos 0=1$，$\cos 1>0$，所以，方程$x=\cos x$在区间$(0, 1)$上有一根。

在此区间上，$|\varphi'(x)|\leqslant \sin 1<1$，可以用逐次逼近法。取$x_1=1$。计算得到$x=0.7391$，具有精度0.0001。

11. 解：从图28可以看出，方程的正根位于函数$y=\cos x$的图像与x轴的交点近旁，且离它左边的交点是$\frac{\pi}{2}+2k\pi$，右边的交点是$\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$。为了求出方程在$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$邻近的根，令 $x-n\pi-\frac{\pi}{2}=y$，则方程为

$$y+n\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\cos\left(y+n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=(-1)^{n+1}\frac{1}{\sin y}$$

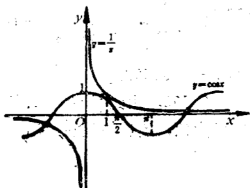


图　28

因为$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以，方程又可写为

$$y=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{y+n\pi+\frac{\pi}{2}}$$

这样

$$\varphi(y)=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{y+n\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$\varphi'(y)=\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{(y+\frac{\pi}{2}+n\pi)^{2}-1}\,(y+n\pi+\frac{\pi}{2})}$$

显然，在点$y=0$附近有

$$|\varphi'(y)|<q<1$$

可以用逐次逼近法。为了求出$n=1$时，精度为0.001的根，取$y_0=0$，计算得$y_2\approx\varphi(y_2)=0.204$

所以，$y\approx0.204$。由此得$x=\frac{3}{2}\pi+y\approx4.917$

为了求出第一个负根，取$n=-1$，我们得到方程

$$y=\arcsin\frac{1}{y-\frac{\pi}{2}}$$，取$y_0=0$，计算得

$y_6=\varphi(y_6)\approx-0.503.$

所以，$y\approx-0.503$，由此得$x\approx-2.074$

对$|n|$的较大值，逐次逼近法给出了一个计算y值的近似公式：

$$y\approx\varphi(y_0)=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$\approx(-1)^{n+1}\frac{2}{(2n+1)\pi}$$

所以

$$x\approx\frac{\pi}{2}(2n+1)+(-1)^{n+1}\frac{2}{(2n+1)\pi}.$$

12. 解：取$x_1=0$，计算得到$x_3=\varphi(x_3)\approx1.088$。所以，方程具有精度0.001的根是$x=1.088$。

13. 解：先解第一个方程

$$x=\sqrt{\lg(x+2)}$$

这里，$\varphi(x)=\sqrt{\lg(x+2)}$，$\varphi'(x)=\frac{\lg e}{2(x+2)\sqrt{\lg(x+2)}}$

因为$\varphi(0)=\sqrt{\lg2}>0$，$\varphi(1)=\sqrt{\lg3}<1$。故方程在区间[0，1]上有一根。在此区间上，$|\varphi'(x)|<q<1$，因此能用逐次逼近法。取$x_1=1$，得$x_5\approx\varphi(x_5)\approx0.6507$。所以，方程$x=\sqrt{\lg(x+2)}$具有精度0.0001的根等于0.6507。

再解第二个方程

$$x=-\sqrt{\lg(x+2)}$$

在这里，$\varphi(x)=\mp\sqrt{\lg(x+2)}$，$\varphi(0)=-\sqrt{\lg 2}\mp-0.55$，$\varphi(-\frac{1}{2})=-\sqrt{\lg 1.5}=-0.42$，故方程在区间$(-\frac{1}{2},\ 0)$上有一根。取$x_1=0$，计算得到$x_8=\varphi(x_8)\approx-0.4397$。所以，在精度0.001内有$x=-0.4397$。

14. 解：方程有一个根是$x=0$。为求其余的根，把方程写为

$$x=\pm\sqrt{\ln(x+1)}$$

对于方程$x=\sqrt{\ln(x+1)}$，有

$$\varphi(\frac{1}{2})=\sqrt{\ln(\frac{3}{2})}>\frac{1}{2},\ \varphi(1)=\sqrt{\ln 2}<1$$

因此，方程在区间$(\frac{1}{2},\ 1)$上有一根。因为

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$$

所以在区间$(\frac{1}{2},\ 1)$上，$|\varphi'(x)|<q<1$。取$x_1=1$，得$x_9=\varphi(x_9)\approx0.7469$。所以，$x=0.7469$具有精度0.0001。

对于方程$x=-\sqrt{\ln(x+1)}$，除$x=0$外没有另外的根。

所以，方程的根是$x=0$或$x=0.7469$。

15. 解：把方程改写为

$$x=\sqrt{4-\ln x}$$

这里 $\varphi(x)=\sqrt{4-\ln x}$，$\varphi(1)=2$，$\varphi(2)=\sqrt{4-\ln 2}$，

且 $\varphi'(x)=\dfrac{-1}{2x\sqrt{4-\ln x}}$

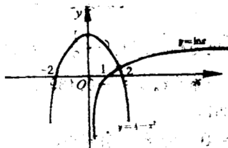


图 29

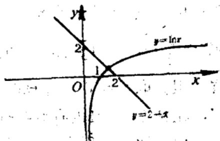


图 30

因为$\varphi(1)=2$，$\varphi(2)=\sqrt{4-\ln 2}<2$，故方程在区间〔1，2〕上有一根。从图29中明显知道，方程没有另外的根。取$x_0=2$，我们得到$x_4\approx\varphi(x_4)\approx1.841$。

所以，具有0.001的根是$x=1.841$。

16．解：把方程写为

$$x=2-\ln x$$

的形式。这里$\varphi(x)=2-\ln x$，$\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x}$。从图30可以看出，方程的根在区间〔1,2〕上。在此区间上，$|\varphi'(x)|\leqslant 1$。取$x_1=1.5$，我们得到$x_{13}\approx\varphi(x_{13})\approx1.557$。

所以，$x=1.557$具有精度0.001。

17．解：从图31中可以看出，方程仅有一负根。把方程写为：

$$x=-\sqrt{e^x+2}$$

则 $\varphi(x)=-\sqrt{e^x+2}$，$\varphi'(x)=\dfrac{-e^x}{2\sqrt{e^x+2}}$，且

$$\varphi(-1)=-\sqrt{e^{-1}+2}\approx-1.54,\ \varphi(-2)=-\sqrt{e^{-2}+2}$$

$$\approx -1.46$$

所以方程的根位于区间〔-2，-1〕上。取$x_1=-1$，计算得到$x_4\approx\varphi(x_4)\approx-1.492$。

所以，在精度 0.001内有$x=-1.492$。

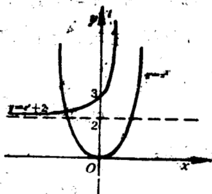


图31

18. 解：明显地，方程有一根是$x=10$。为求方程的第二个根把方程写为：$x=10^{0.1x}$

这里，$\varphi(x)=10^{0.1x}$，$\varphi'(x)=0.1\times10^{0.1x}\ln10$，且$\varphi(1)=10^{0.1}>1$，$\varphi(2)=10^{0.2}<2$。因此方程在区间〔1，2〕上有一根。在此区间上

$$|\varphi'(x)|\leqslant0.1\times10^{0.2}\ln10\approx0.37<1$$

能用逐次逼近法。取$x_1=2$，得$x_7\approx\varphi(x_7)\approx1.372$。

所以，$x=1.372$有精度0.001。

19. 解：从图32可以看出，方程在每个区间〔$\frac{\pi}{2}+n\pi$，$\frac{\pi}{2}$

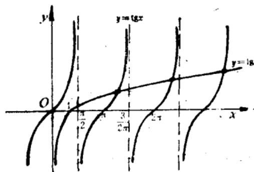


图 32

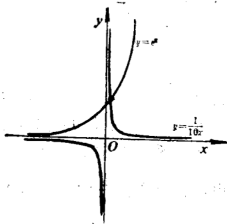


图 33

$+(n+1)\pi)$ $n=0, 1, 2\cdots\cdots$上都有一根，且这些根都在每个区间的右端。为了求第一个正根，作代换$x=\frac{3}{2}\pi-y$，则方程为

$$\mathrm{ctg}\, y=\lg\left(\frac{3}{2}\pi-y\right)$$

由此得：

$$y=\mathrm{arcctg}\left[\lg\left(\frac{3}{2}\pi-y\right)\right]\quad(0<y<\pi)$$

这里，$\varphi(y)=\mathrm{arcctg}\left[\lg\left(\frac{3}{2}\pi-y\right)\right]$

$$\varphi'(y)=\frac{-\lg e}{\left[1+\lg^2\left(\frac{3}{2}\pi-y\right)\right]\left(\frac{3}{2}\pi-y\right)}$$

在区间$(0, \pi)$上，方程有一根，且$|\varphi'(y)|<1$.应用逐次逼近法，取$y_1=0$，得$y_4\approx\varphi(y_4)\approx1.059$。

所以，在精度0.001内，有$y=1.059$，即$x=3.654$。

为了求第二个正根，令$x=\frac{5}{2}\pi-y$，则方程为

$$y=\mathrm{arcctg}\left[\lg\left(\frac{5}{2}\pi-y\right)\right]$$

取$y_1=0$，计算得$y_4\approx\varphi(y_4)\approx0.870$。

所以，在精度0.001内，有$y=0.870$，即$x=6.984$.

20. 解：从图33可以看出，方程在0和1之间有一根。这里，$\varphi(x)=\frac{1}{10}e^{-x}$，$\varphi'(x)=-\frac{1}{10}e^{-x}$，且在区间$(0, 1)$上，不等式$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{1}{10}$成立，完全可以用逐次逼近法

求解。取$x_1=0$，有$x_4\approx\varphi(x_4)\approx0.091$.

所以，在精度0.0001内，$x=0.091$。

21．解：令$f(x)=x^3-5x+1$，则

$$f'(x)=3x^2-5,\quad f''(x)=6x$$

使用牛顿公式有

$$\beta_{n+1}=\beta_n-\frac{\beta_n^3-5\beta_{n+1}}{3\beta_n^2-5}$$

函数在一些点上的值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-11	3	5	1	-3	-1	13

从表中可以看出，方程x^3-5x+1在区间$(-3,-2)$，$(0,1)$和$(2,3)$上各有一根。

先求区间$(-3,-2)$上的根，在此区间上，因为$f''(x)<0$，所以，我们取初始值$\beta_0=-3$（因为$f(\beta_0)=-11<0$）。计算得

$$\beta_1=-3-\frac{(-3)^3-5(-3)+1}{3(-3)^2-5}=-2.5$$

继续计算得$\beta_3\approx\beta_4\approx-2.331$。所以，在区间$(-3,-2)$上，方程精度为0.001的根是$x=-2.331$。

其次求区间$(0,1)$上的根。在此区间上，$f''(x)\geqslant0$，因此取$\beta_0=0$。计算得

$$\beta_1=0-\frac{0^3-5\times0+1}{3\times0^2-5}=0.2$$

$$\beta_3\approx\beta_4\approx0.202$$

所以，在区间$(0,1)$上，方程的根是$x=0.202$，具有精度0.001。

最后求区间〔2，3〕上的根。取$\beta_0=3$，计算得

$$\beta_1=3-\frac{3^3-5\times3+1}{3\times3^2-5}\approx2.409$$

继续计算得

$$\beta_4\approx\beta_5\approx2.128$$

所以，在区间〔2，3〕上，方程的根是$x=2.128$，精度为0.001。

于是我们求出了方程的三个根：$x_1=-2.331$，$x_2=0.202$，$x_3=2.128$。

再用改进的弦截法解这个方程。在区间〔-3，-2〕上，我们求出

$$\alpha_1=-3-f(-3)\frac{-3-(-2)}{f(-3)-f(-2)}$$

$$\doteq-3+11\frac{-1}{-14}\approx-2.214$$

在此区间上，因为$f''(x)<0$，所以函数曲线是向下凹的，故由下式计算α_2

$$\alpha_2=-3-f(-3)\frac{-3-(-2.214)}{f(-3)-f(-2.214)}\approx2.293$$

接着再计算

$$\alpha_3=-2.293-f(-2.293)\frac{-2.293+2.214}{f(-2.293)-f(-2.214)}$$

$$\approx-2.331$$

这结果与上面得到的x值一样，也在精度0.001内。

使用同样的方法还可求出方程在区间〔0，1〕和〔2，3〕上的根。

22. 解：这里，我们有

$$f(x)=x^3-9x^2+20x-11$$

$$f'(x)=3x^2-18x+20$$

$$f''(x)=6x-18=6(x-3)$$

计算函数值如下表：

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	−11	1	1	−5	−11	−11	1

所以，方程的根在区间〔0，1〕，〔2，3〕和〔5，6〕上，

在区间〔0，1〕上，取$\beta_0=0$，计算得到$\beta_4\approx\beta_5\approx0.834$，在区间〔2，3〕上，取$\beta_0=3$，计算得到$\beta_2\approx\beta_3\approx2.216$；在区间〔5，6〕上，取$\beta_0=6$，计算得到$\beta_4\approx\beta_5\approx5.249$。

所以，我们求出方程的根是：$x_1=0.834$，$x_2=2.216$，$x_3=5.249$，精度为0.001。

23. 解：这里

$$f(x)=x^3-3x^2-3x+11$$

$$f'(x)=3x^2-6x-3$$

$$f''(x)=6x-6=6(x-1)$$

计算函数值如下表：

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−3	10	11	6	1	2

所以，方程在区间〔−2，−1〕上有一实根。为求此根，我们取$\beta_0=-2$，计算得

$$\beta_2\approx\beta_3\approx-1.847$$

所以，$x=-1.847$，精度为0.001。

24. 解：此题中

$$f(x)=x^5+5x+1$$

$$f'(x)=5x^4+5$$

$$f''(x)=20x^3$$

列函数值表：

x	-1	0	1
$f(x)$	-5	1	7

因此，方程在区间$(-1,0)$上有一根。取$\beta_0=-1$，在精度0.0001内

$$\beta_3\approx\beta_4\approx-0.1999$$

所以，$x=-0.1999$满足精度0.0001。

25. 解：这里有

$$f(x)=\sin x+x-1$$

$$f'(x)=\cos x+1$$

$$f''(x)=-\sin x$$

$f(x)$的函数值如下表：

x	0	1	2
f(x)	-1	0.8115	1.9093

因此，方程在区间(0, 1)上有一根。取$\beta_0=0$，我们求得$\beta_2\approx\beta_3\approx0.5110$。

所以，在精度0.0001内有$x=0.5110$。

26. 解：在这里

$$f(x)=x^2-10\log x-3$$

$$f'(x)=2x\frac{10}{-x\ln10}$$

$$f''(x)=2+\frac{10}{x^2\ln10}$$

$f(x)$的函数值表为：

x	0.5	1	2	3
$f(x)$	0.26	-2	-2.01	1.23

因此，方程的根位于区间(0.5, 1)和(2,

3）上。

在区间〔0.5， 1〕上，取$\beta_0=0.5$，得到$\beta_2\approx\beta_3\approx0.535$. 所以，满足精度0.001的根等于0.535。

在区间〔2， 3〕上，取$\beta_0=3$，得到$\beta_2\approx\beta_3\approx2.705$。

所以，方程有两个根：$x_1=0.535$，$x_2=2.705$。

27. 解：（a）取$x_0=0$，$y_0=0$，$z_0=0$。经过几次逼近计算后，得到具有精度0.001的近似解是：

$$\begin{cases} x=1.021 \\ y=2.150 \\ z=3.072 \end{cases}$$

（b）取$x_0=0$，$y_0=0$。计算几次以后的近似解（精度为0.001）是：

$$\begin{cases} x=0.520 \\ y=0.310 \end{cases}$$

（c）取$x_0=0$，$y_0=0$，计算得

$$\begin{cases} x=1.000 \\ y=2.000 \end{cases}$$